



GIANFRANCO BASTI

LOGICA III: LOGICA FILOSOFICA E FILOSOFIA FORMALE

**Parte III:
Teoria delle Categorie, Dualità Algebra-Coalgebra,
e il Bi-condizionale Ontologico**

Roma 2017

SOMMARIO

SOMMARIO	217
7. IL PROBLEMA DEL BI-CONDIZIONALE ONTOLOGICO E LA SUA SOLUZIONE COALGEBRICA.....	219
7.1. UTILITÀ E LIMITE LOGICO DELLA SOLUZIONE ARISTOTELICO-TOMISTA DEL PROBLEMA.....	219
7.2. APPENDICI.....	228
7.2.1. <i>Le conseguenze della (non-)soluzione moderna del problema del bi-condizionale ontologico</i>	<i>228</i>
7.2.2. <i>La visione pionieristica del “naturalismo semiotico” di Peirce.....</i>	<i>234</i>
7.3. DUALITÀ IN MATEMATICA, FISICA E LOGICA	236
7.3.1. <i>Dualità in matematica e logica.....</i>	<i>236</i>
7.3.2. <i>Dualità nella logica di Boole e in logica proposizionale.....</i>	<i>240</i>
7.4. LA LOGICA DI BOOLE NELLA COSIDDETTA “ERA DI STONE”	244
7.4.1. <i>Spazi topologici e insiemi aperti e chiusi.....</i>	<i>244</i>
7.4.2. <i>Teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole</i>	<i>249</i>
8. ALCUNI ELEMENTI DI TEORIA DELLE CATEGORIE (TC) (ABRAMSKY & TZEVELEKOS, 2011)	259
8.1. ALCUNE NOZIONI FONDAMENTALI DELLA TC.....	259
8.2. LA CENTRALITÀ DELLA DUALITÀ IN TC E SEMANTICA	268
8.3. LA “COALGEBRA UNIVERSALE” COME TEORIA GENERALE DEI SISTEMI DINAMICI E LA GIUSTIFICAZIONE DEL BICONDIZIONALE ONTOLOGICO.....	273
8.3.1. <i>Insiemi non-benfondati e la Coalgebra Universale</i>	<i>273</i>
8.3.1.1. <i>Le origini: infinite inclusioni.....</i>	<i>273</i>
8.3.1.2. <i>Assioma di anti-fondazione (anti-foundation axiom, AFA)</i>	<i>275</i>
8.3.1.3. <i>Rappresentazione di insiemi mediante grafi</i>	<i>277</i>
8.3.1.4. <i>Equivalenza per bisimilarità/bisimulazione</i>	<i>287</i>
8.3.1.5. <i>Induzione/coinduzione e logiche modali coalgebriche.....</i>	<i>289</i>
8.3.1.6. <i>Coalgebra universale come teoria generale dei sistemi dinamici.....</i>	<i>291</i>
8.3.2. <i>Bicondizionale ontologico e dualità in TC</i>	<i>293</i>
8.3.2.1. <i>Definizione formale della dualità induzione/coinduzione</i>	<i>293</i>
8.3.2.2. <i>Giustificazione formale del bicondizionale ontologico</i>	<i>300</i>
9. DUALITÀ COALGEBRA-ALGEBRA IN FISICA FONDAMENTALE.....	304
9.1. DALLA QM ALLA QFT TERMICA IN FISICA FONDAMENTALE.....	304

9.2.	MODELLIZZAZIONE COALGEBRICA DELLA QFT TERMICA	318
9.3.	CONSEGUENZE PER I FONDAMENTI DELLA FISICA QUANTISTICA, DELLA COMPUTAZIONE QUANTISTICA E PER LA LORO ONTOLOGIA.....	321
10.	BIBLIOGRAFIA DI QUESTA PARTE	324
11.	NOTE	330

7. IL PROBLEMA DEL BI- CONDIZIONALE ONTOLOGICO E LA SUA SOLUZIONE COALGEBRICA

7.1. Utilità e limite logico della soluzione aristotelico-tomista del problema

- ♦ L'analisi formale della soluzione aristotelico-tomista del problema del bi-condizionale ontologico è **utile**, dal punto di vista semantico per due motivi:
 1. Ha evidenziato le nozioni semantiche di **inclusione causale** $\langle p \supset_c q \rangle$ e quindi di **necessitazione (entailment) causale**: “(il referente di) p precede necessariamente (il referente di) q)” come **duali** a quelle di **inclusione logica** $\langle p \subset q \rangle$ e quindi di **necessitazione (entailment) logica**: “ q segue necessariamente a p)”.

2. Ha evidenziato il **carattere modale** delle nozioni di **necessitazione logica** $\Box$ e **necessitazione causale** $\Box^C$ come formalizzazioni, rispettivamente delle nozioni di **implicazione stretta**: $(\alpha \twoheadrightarrow \beta) := (\Box(\alpha \rightarrow \beta)) \leftrightarrow (\neg\Diamond(\alpha \wedge \neg\beta))$ e di **controimplicazione stretta**: $(\alpha \leftarrow \beta) := (\Box^C(\alpha \leftarrow \beta)) \leftrightarrow (\neg\Diamond(\neg\alpha \wedge \beta))$.

- ◆ Allo stesso tempo questa analisi evidenzia il **limite** logico di una soluzione del problema del **bi-condizionale onto-logico** ($\Leftrightarrow$) in quanto distinto da quello **logico** ($\leftrightarrow$), semplicemente componendo il verso **ontico** ($\leftarrow$: “se l’effetto allora la causa”) con quello **logico** ($\rightarrow$: “se la premessa allora la conclusione”) dell’implicazione.
- ◆ Infatti, la relazione di causazione “(il denotato di) p causa (il denotato di) q ”, ovvero $\langle p \rightarrow_c q \rangle$ come corrispettivo ontico della lettura semantica della relazione di controimplicazione ($p \leftarrow q$), nel senso di “la verità di q (denotante l’effetto) implica la verità di p (denotante la causa)” non conserva **sempre** la verità da p a q come si richiede invece in un **bi-condizionale onto-logico**. Basta, infatti, guardare alle righe 1 e 2 della tavola di verità della contro-implicazione

stretta per capire che non sempre in una relazione causale “la verità di p (denotante la causa) implica la verità di q (denotante l’effetto)”.

- ◆ È in questo che consiste il problema della differenza fra causa e legge, fra **necessitazione causale** e **necessitazione logica**: una causa produce sempre l’effetto se e solo se è sottoposta a legge.
- ◆ Di qui la soluzione moderna di Leibniz e Kant di fondare la necessitazione causale su quella logica, ovvero di legare il bi-condizionale ontologico a un’**interpretazione empirica** del bi-condizionale logico dell’equivalenza, e quindi ad un’interpretazione **concettualista** del naturalismo e dell’ontologia delle scienze naturali.
- ◆ Se non vogliamo seguire questa via moderna di (non-)soluzione del problema che di fatto elimina uno dei corni del dilemma (la necessitazione causale), con le conseguenze che ne sono derivate (cfr. Appendice di questa sottosezione), dobbiamo determinare sotto quali condizioni la **verità** fra i due termini dell’equivalenza in un **bi-condizionale onto-logico** che **appartengono a due categorie distinte una logica l’altra ontica** può essere giustificata senza supporre una soggiacente **tautologia**, cioè la loro equivalenza solo **logica**.

- ◆ La soluzione aristotelico-tomista, ma sarebbe meglio dire **naturalista**, perché ripresa, come vedremo, sia in ambito di **fisica fondamentale** (QFT) che di **logica computazionale** (*theoretical computer science*, TCS), consiste nel considerare nel bi-condizionale ontologico le relazioni **reali** fra cose come **semantica** delle relazioni logiche fra simboli del calcolo.
- ◆ Se vogliamo usare la formalizzazione modale della teoria aristotelico-tomista sopra illustrata (Cfr. §4.8.2), la soluzione consiste nel prendere la **necessitazione causale** (*causal entailment*, inclusione causale) come **fondamento** (= semantica) della **necessitazione logica** (*logical entailment*, inclusione logica).
- ◆ Il concetto di **necessitazione** (*entailment*) va inteso comunque in un senso diverso da quello dell'ordinaria semantica formale puramente logica, sia nel senso della logica **matematica/estensionale** sia nel senso della logica **modale/intensionale**.
- ◆ Infatti, nel senso causale non può riguardare **tutti gli oggetti del calcolo/teoria** visto che causalmente intesi non possono essere concepiti come **simultaneamente esistenti/veri** in base agli assiomi della teoria. In una “causa” i suoi “effetti” esistono solo **virtualmente**. Quindi le verità **causalmente necessitate** possono essere solo di carattere **locale** non **totale** come le verità

logicamente necessitate e questo ci rimanda alle **logiche di Boole** e alle loro semantiche su **insiemi parzialmente e non totalmente ordinati**.

- ◆ Questo è un ulteriore e definitivo motivo per farci capire l'insufficienza di una formalizzazione nei termini provvisori di quella proposta nella Sez.6 della Parte 2, visto che colà si stava pur sempre supponendo una semantica del secondo ordine che giustificando insiemi totalmente ordinati ha a che fare anche con verità totali e quindi con sistemi **S5** di metafisica.
- ◆ Per capire questo *posit* naturalista in filosofia formale occorrono dunque due passaggi:
 1. Interpretare l'inversione delle relazioni di implicazione causale e logica come un caso particolare di **dualità** in teoria delle **categorie** fra una **categoria (Cat)** e la sua **opposta (Cat^{op})**, che **conserva sempre la verità** fra le due direzioni dell'opposizione, il che si può ottenere in due modi:
 - Invertendo gli **assiomi** che giustificano formalmente le strutture che appartengono alle due categorie opposte, e questo è quanto normalmente si fa' in logica e matematica nel trattare le dualità → semantiche del secondo ordine.

- Un altro modo per ottenere lo stesso risultato e che non obbliga, ma non esclude l'uso delle semantiche del secondo ordine è quello legato alla nozione categoriale in TC della nozione di **funtore** come **mappa fra strutture** di una medesima categoria che può essere applicato in maniera **covariante** in modo da mantenere **verso** e **ordine** delle relazioni della struttura da cui parte a quella cui si applica, oppure in maniera **controvariante** in modo da invertirli.
- Nel nostro caso specifico, perciò, si tratta della dualità fra una **coalgebra** (**Coalg**) e la sua **algebra** (**Alg^{op}**) **funtoriale**, dove cioè esiste un **funtore** Ω , ovvero un **mapping** ($\dashv$) **omomorfo** che manda la struttura dell'una sull'altra, conservando la struttura, **ma invertendo tutte le frecce (morfismi) e i loro ordini di composizione** – il che giustifica **la conservazione della verità** per asserti definiti su ciascuna delle due.
- Applicata dalla TCS alle logiche booleane, queste nozioni giustificano l'asserto generale che la coalgebra fornisce la **semantica** della connessa algebra di Boole e della sua **logica equazionale** (= traduzione booleana di una logica proposizionale) che può essere definita su di essa. Corollario di tale

interpretazione è la dimostrazione che “le semantiche modali – nello specifico, la semantica relazionale di modelli di Kripke – sono coalgebriche”.

2. Dimostrare che gli insiemi su cui la semantica coalgebrica di un'algebra di Boole è definita sono **insiemi non-benfondati** (*non-wellfounded sets*, NWFS) di Aczel, ovvero un particolare tipo di **insiemi non-standard**, che consentono l'**auto-inclusione di insiemi** e quindi **successioni infinite** (*non-limitate*) di **inclusioni di insiemi**, essendo **gli insiemi standard** **gli insiemi benfondati** (*wellfounded sets*) delle ordinarie teorie assiomatiche degli insiemi (p.es., ZFC e NGB).
- ♦ Una dimostrazione fondamentale, questa, ottenuta dalla TCS perché libera la **semantica insiemistica** in logica computazionale dalle pastoie della semantica del secondo ordine della teoria degli insiemi standard perché giustifica solo **verità “locali”**, visto che l'**assioma di anti-fondazione** degli NWFS implica l'assenza di **ordinamento totale**, ma solo un numero indefinito di **ordinamenti parziali di insiemi** e quindi di **verità locali per le relative algebre di Boole (=modelli di Kripke)**.
- ♦ La possibilità sistematica di definire sugli NWFS strutture coalgebriche **duali ma omomorfe** rispetto alle corrispondenti algebre di Boole, consente quindi in logica

filosofica, di fornire una **dimostrazione di completezza della semantica relazionale di modelli di Kripke** e delle sue successioni infinite di inclusioni di modelli intese come strutture ad albero definite su insiemi aperti, “chiusi” da altri insiemi aperti.

- ◆ Una dimostrazione che, ovviamente, non può essere ottenuta in una teoria standard degli insiemi. Per ciò stesso si ottiene in filosofia formale l’adeguata **formalizzazione algebrica della causalità formale aristotelica** che Leibniz cercò invano nella sua *Characteristica Universalis*, prodoroma della successiva Algebra Universale. La formalizzazione algebrica della causalità formale va dunque trovata nella **dualità funtoriale Coalgebra Universale-Algebra Universale**, a livello semantico, perciò, e non sintattico!

Due corollari della suddetta dimostrazione sono da essere evidenziati:

- a. **Nell’ontologia della fisica fondamentale.** La cosmologia evolutiva richiede una fondazione causale nell’evoluzione dell’universo delle stesse leggi matematiche della fisica. Ciò ha portato i fisici teorici a cercare di costruire una **teorica causale degli insiemi** che consentisse la formalizzazione matematica di **alberi evolutivi** definiti su insiemi aperti di insiemi

parzialmente ordinati (cfr. Ungerer-Smolín 2015). Ciò si ottiene immediatamente se le inclusioni su insiemi di Aczel nelle coalgebre funtoriali della QFT sono interpretate come **inclusioni causali** come formalizzato in RN.

- b. **Nella formalizzazione dell'ontologia aristotelico-tomista della causalità.** Il carattere funtoriale della semantica della causalità in RN appare in assoluta continuità con la teoria aristotelico-tomista della causalità che suppone la necessità di una **similitudine** – algebricamente un omomorfismo ovvero una relazione (mappa) che **mantiene la struttura**, che è non-necessariamente isomorfo (=invertibile) quando abbiamo a che fare con strutture infinite dove dunque sarà solo **localmente** isomorfo per sottostrutture finite – fra causa ed effetto, nel senso che la causa **rende simile a sé** l'effetto. Nella esemplificazione aristotelica dell'idea, il fuoco rende simile a sé il corpo riscaldandolo, partecipando ad esso il suo calore (qualità). Nella semantica tommasiana dell'analogia, l'**analogia di attribuzione** fonda, infatti, **l'analogia di proporzionalità**.
L'analogia di attribuzione (o di proporzione) è quella **fondata sulla causalità**

(l'analogia, secondo cui, per esempio, si attribuisce analogamente “la sanità” al cibo o al sangue dell'animale, in quanto rispettivamente “causa” ed “effetto” della sanità che, propriamente, si può attribuire solo all'animale). L'analogia di proporzionalità è invece quella, **puramente logica** che suppone la sola identità di struttura definita su domini diversi di oggetti (= diversi modelli di un'unica struttura: p.es., “arco” predicato analogamente di un oggetto geometrico (arco di cerchio), di uno architettonico, e di uno da guerra. In inglese, invece, dove il termine è univoco, essi si denotano rispettivamente come *arc*, *arch* and *bow*).

7.2. Appendici

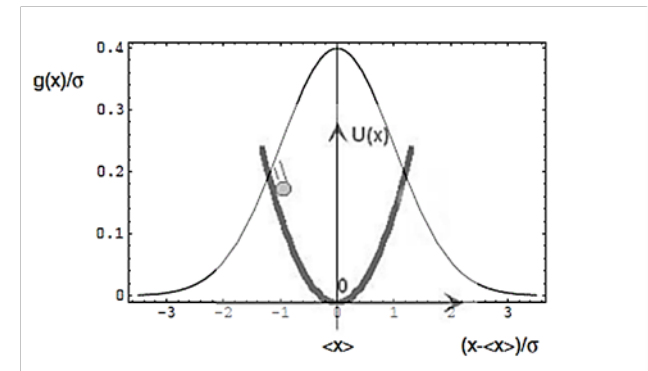
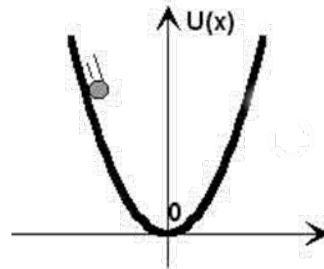
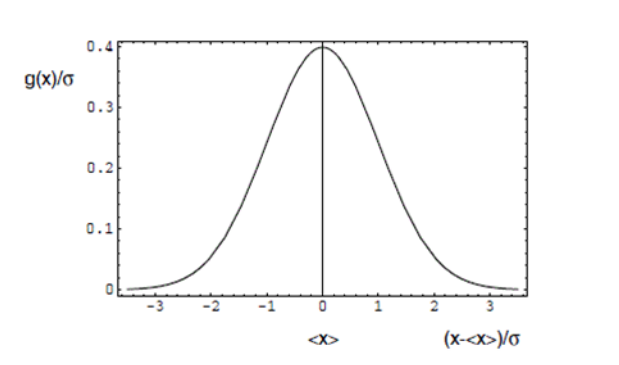
7.2.1. Le conseguenze della (non-)soluzione moderna del problema del bi-condizionale ontologico

- ◆ L'obbligo moderno di fondare la necessità causale sulla necessità logica ha delle conseguenze **epocali** che caratterizzano il passaggio dalla filosofia classica alla filosofia moderna:

1. Passaggio dalla concezione classica di scienza come *cognitio certa per causas*, alla concezione moderna della *cognitio certa per leges*;
2. Impossibilità di una **metafisica naturalista** di tipo causale (vedi la famosa opera di Kant *Prolegomeni ad ogni metafisica che in futuro vorrà presentarsi come scienza*, tutta centrata sull'impossibilità di una metafisica naturale per l'impossibilità di una fondazione non logica della causalità):
 - a. Impossibilità di una **fondazione causale delle nature** dei corpi → esistenza di **un'unica natura** (Spinoza) per l'unicità delle leggi matematiche per tutte le scienze naturali;
 - b. Impossibilità dell'esistenza di **cause libere nel mondo naturale** (cause capaci di determinare se produrre o no un effetto: Dio, uomini...) → impossibilità di un'**antropologia** e di una **teologia naturali** → conflitto moderno fra **determinismo delle leggi di natura, libertà dell'uomo e libertà di Dio**.
 - c. Tentativo moderno di una teologia naturale basata sull'interpretazione di Dio come "**legislatore della natura**" e non più "**causa prima**" ("Dio-orologiaio" di Newton) e successiva crisi dell'idea:

- Con l'equivalenza spinoziana **Dio-determinismo leggi di natura** (*Deus sive natura*);
- Fondazione **concettualista** (=autocoscienza **trascendentale**) delle leggi logico-matematiche della natura e delle leggi morali (formalismo etico) nel kantismo;
- Scoperta della **natura statistica delle leggi fisiche e biologiche**, basate sull'identità di “caso e necessità”, in conseguenza della **legge di Gauss sui “grandi numeri” (=teorema del limite centrale)**. Nel limite infinito del numero degli elementi indipendenti x (p.es., molecole di un gas) di una distribuzione statistica rispetto a una certa grandezza fisica g (p.es., la velocità con cui le molecole si muovono in un contenitore isolato e quindi la **temperatura** di quel gas (o la sua **pressione**, o **volume**) che sono tutte “variabili termodinamiche” proporzionali alla velocità), l'integrale è **sempre definito**, avrà cioè sempre la forma “normale” di una **campana di Gauss**, la cui “moda” (max del numero degli elementi) coinciderà con la “media” del valore di una determinata **grandezza variabile** g definita sugli elementi della distribuzione, $g(x)$.

- Nel caso della **termodinamica dei gas di Boltzmann**, nell'esempio citato, tale grandezza è l'energia, cosicché nel limite infinito, corrisponderà in **meccanica statistica** al **minimo del potenziale energetico** $U(x)=0$ del sistema considerato (= assenza di **energia libera**, ovvero di energia



potenziale per compiere un lavoro, perché la stragrande maggioranza delle particelle si muovono con una velocità *media*). Corrisponderà cioè allo **stato di equilibrio** della III Legge di Newton o **stato di massima entropia** della termodinamica all'equilibrio di Boltzmann → “morte termodinamica” del sistema (cfr. **Figura 1**)

Figura 1. Distribuzione normale dove (sinistra), minimo del potenziale della funzione energia (centro), stabilità all'equilibrio di un sistema termodinamico a molte particelle (p.es., volume di gas) isolato (destra): il massimo numero di particelle si muove con un valor medio di energia cinetica → min di energia libera (potenziale) e max di entropia statistica.

➤ → Stretta relazione fra meccanica classica di Newton e meccanica statistica di Boltzmann-Laplace.

○ Era stato infatti Laplace a suggerire per primo che per conciliare una “fisica a molti corpi” della meccanica statistica con “l’isolamento nel vuoto meccanico” della meccanica di Newton, occorresse studiare il sistema nella cosiddetta “condizione asintotica”. **Distanziando cioè all’infinito nello spazio e nel tempo le particelle** del sistema a molti corpi, cancellando le loro interazioni così da applicare ad esso le leggi della meccanica di Newton, innanzitutto la I Legge, il **principio d’inerzia**. Quello del limite asintotico costituisce così il cuore dei cosiddetti **metodi perturbativi** della meccanica statistica, come fisica “a molti corpi” (*many-body physics*) formalizzata da Laplace

- o Ovviamente, il limite termodinamico dello **stato di equilibrio** del “caos molecolare” della teoria di Boltzmann offre una condizione equivalente visto che tutte le particelle muovendosi e urtandosi caoticamente (**massima entropia**) compensano l’un l’altra le interazioni, muovendosi a una velocità media, annullando l’energia libera, e quindi creando una condizione equivalente a quella della condizione asintotica.
- D’altra parte il collegamento col concettualismo kantiano è evidente visto che la misura di entropia (incertezza nella determinazione dello stato della singola particella) **dipende dall’osservatore**: per un osservatore dalle capacità infinite (demone di Laplace) non esisterebbe alcuna forma di casualità/indeterminazione e quindi nessuna entropia.
- Ruolo fondamentale del **caso/probabilità → conflitto teologia-evoluzione**: cfr. la metafora “dell’orologiaio cieco” di Dawkins. Ovvero non serve un Legislatore Intelligente (*Intelligent Designer*) per spiegare l’evoluzione in quanto basata sulla meccanica statistica, basta il Caso.

- o Tre principi dell'evoluzione darwiniana: 1) **Mutazione casuale** del genoma dell'organismo (Mendel aveva appena scoperto la natura statistica della genetica inventando il concetto di “gene”); 2) **Adattamento all'ambiente** (condizione di **omeostasi** come stabilità all'equilibrio con l'ambiente), 3) **Selezione naturale** come selezione del “più adatto”.
- Involuzione **volontarista del concettualismo trascendentalista** → nihilismo e relativismo contemporanei...

7.2.2. La visione pionieristica del “naturalismo semiotico” di Peirce

- ◆ La centralità della **meccanica statistica** tanto in fisica fondamentale anche quantistica (*quantum mechanics*, QM) quanto in chimica e biologia ci fa tanto più apprezzare il naturalismo di Peirce che trova nella stessa fisica fondamentale la controparte fisica della sua algebra triadica delle relazioni in logica, così da far definire dai suoi studiosi la sua posizione un **naturalismo semiotico**.
- ◆ Ecco un passo dei suoi Manoscritti in cui egli estende la sua **teoria triadica delle categorie** (*firstness, secondness, thirdness*) dal linguaggio al mondo naturale,

così da offrire una ipotesi pionieristica di una **cosmologia evolutiva in cosmologia** che riguarda la stessa costituzione delle leggi matematiche della fisica, contro il **determinismo basato sull'osservatore** della meccanica classica (Newtoniana) e statistica (Laplaciana) da cui il trascendentalismo kantiano dipende direttamente. Ecco il suo testo del 1886 che in qualche modo vorrebbe giustificare il suo **realismo naturalista neo-Aristotelico basato sulla semiotica**:
“We have to suppose that in looking into the indefinite past we are looking into back towards times when the element of law played an indefinitely small part in the universe. If the universe is thus progressing from a state of all but pure chance to a state of all but complete determination by law, we must suppose that there is an original, elemental, tendency of things to acquire determinate properties, to take habits. This is the **Third** or mediating element between chance, which brings forth **First** and original events, and law which produces sequences or **Seconds**. Now this tendency to take habits is something essentially finite in amount, an infinitely strong tendency of this sort (unlike an absolute conformity to law) is inconceivable and self-contradictory. Consequently, this tendency must itself have been gradually evolved; and it would evidently tend to strengthen itself. Here is a

rational physical hypothesis, which is calculated to account, or all but account for everything in the universe except pure originality itself (Peirce, 1886, MS [R] 897).

- ◆ Vedremo come questa visione tendente a dare una giustificazione dinamica “indipendente dall’osservatore” sia dell’indeterminazione, sia dell’emergenza di strutture ordinate della materia, fino alle stesse leggi matematiche della natura, ha nella cosmologia della QFT basata sulla nozione di vuoto quantistico (*quantum vacuum*, QV) la sua attuale realizzazione.

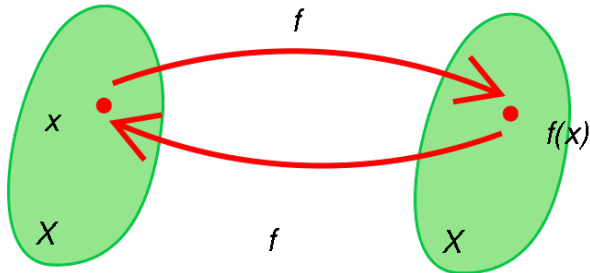
7.3. Dualità in matematica, fisica e logica

7.3.1. Dualità in matematica e logica

- ◆ Il concetto di **dualità** è largamente usato sia in matematica, teorica e applicata – soprattutto in fisica-matematica –, che in logica.
- ◆ Uno dei maggiori matematici viventi il Premio Field per la matematica 1986, l’indiano M. Atiyah, in uno scritto che viene unanimemente definito come una delle migliori sintesi al riguardo¹ anche se si limita ad alcune dualità solo in matematica e fisica, senza citare le dualità in logica, così inizia il suo saggio:

*La dualità in matematica non è un teorema, ma un “principio”. Ha un’origine semplice, è molto potente e utile ed ha una lunga storia che va indietro di centinaia di anni. Nel tempo è stato adattato e modificato e così noi oggi l’usiamo in nuove situazioni. Essa appare in molti soggetti, sia in matematica (geometria, algebra, analisi), che in fisica. Fondamentalmente la dualità **fornisce due differenti punti di vista per guardare allo stesso oggetto**. Vi sono molte cose che hanno due differenti punti di vista e, in linea di principio, sono tutte dualità.*

- ◆ Infatti, generalmente con “dualità” s’intende **in matematica** la traducibilità in una relazione uno-a-uno di concetti, teoremi, strutture in altri concetti, teoremi o strutture attraverso (ma non sempre) operazioni di **involuzione**, così che se il duale di A è B , il duale di B è A .
 - In matematica, un’involuzione è una funzione che è la sua propria inversa, cioè: $\langle f(f(x)) = x \rangle$, cosicché quando applicata due volte riporta al suo punto di partenza: $f: X \rightarrow X$, cioè:



♦ Il concetto di dualità in teoria degli insiemi è strettamente legato alla **teoria dell'ordinamento**, sono così esempi di **dualità** le seguenti relazioni:

1. Le relazioni di **super-insieme/sotto-insieme**, $\supset/\subset$, in qualsiasi collezione di insiemi;
2. Le relazioni di **divisore/multiplo** definite su insiemi di numeri interi;
3. Le relazioni di **antenato/discendente** definite su insiemi aperti.

♦ In **logica** “le madri di tutte le dualità” sono le due fondamentali **leggi di De Morgan** di logica delle proposizioni, riguardo i tre predicati (connettivi) di **coniunzione, disgiunzione, negazione** cui, non casualmente, corrispondono i tre fondamentali **operatori insiemistici** di **intersezione, unione,**

complementazione che definiscono una **logica di Boole**, e quindi la fondamentale equivalenza fra **logica proposizionale** e **logica equazionale**.

♦ **Informalmente**, le due leggi si leggono:

1. **non**(**A o B**) è lo stesso che (**nonA**) e (**nonB**)
2. **non**(**A e B**) è lo stesso che (**nonA**) o (**nonB**)

♦ **Formalmente**:

1. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$
2. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$

♦ Dalla fondamentale dualità espressa dalle leggi di De Morgan, altre fondamentali dualità logiche sono quelle:

1. Fra **quantificatore universale** e **quantificatore esistenziale**, in logica dei predicati data la stretta relazione fra il primo e la **coniunzione delle proposizioni quantificate** e fra il secondo e la **disgiunzione delle proposizioni quantificate**, ambedue in un determinato modello, ovvero:

Dato che $\forall x Px \Leftrightarrow (Pa \wedge Pb \wedge Pc)$ e $\exists x Px \Leftrightarrow (Pa \vee Pb \vee Pc)$, per le leggi di De Morgan derivano immediatamente le dualità – fra l'altro alla base dello stesso quadrato delle opposizioni logiche di Aristotele:

$$\forall x Px \Leftrightarrow \neg \exists x \neg Px$$

$$\exists x Px \Leftrightarrow \neg \forall x \neg Px$$

Quindi, data la stretta interconnessione fra i quantificatori e gli **operatori di logica modale**, due altre dualità fondamentali derivano, quelle:

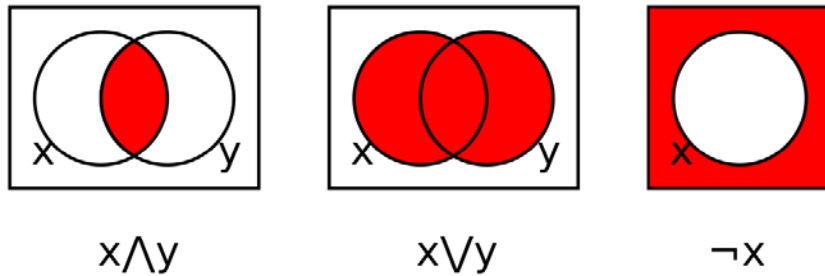
2. Fra **gli operatori di necessità/possibilità** in logica modale, ovvero:

$$\Box p \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$$

$$\Diamond p \Leftrightarrow \neg \Box \neg p$$

7.3.2. Dualità nella logica di Boole e in logica proposizionale

- ◆ Poiché tutti i connettivi logici possono essere derivati dai tre principali ($\wedge, \vee, \neg$) coinvolti nelle leggi di De Morgan (cfr. sopra §4.5.1) si comprende come essi costituiscano **la caratterizzazione** (*signature*) di un'algebra di Boole con operatori definiti su insiemi (*Boolean Algebra with Operators*, BAO), e dove quindi i simboli $(0,1)$ costituiscano altrettante valutazioni sulle corrispondenti proposizioni: $(\top, \perp, \wedge, \vee, -)$.



- ◆ Per completare il quadro, e capire immediatamente la connessione fra logiche di Boole e TCS, ecco gli schemi delle principali **porte logiche (logical gates)**, implementabili in altrettanti circuiti di un calcolatore, corrispondenti ai fondamentali **connettivi logici** (o predicatori proposizionali) della logica delle proposizioni:

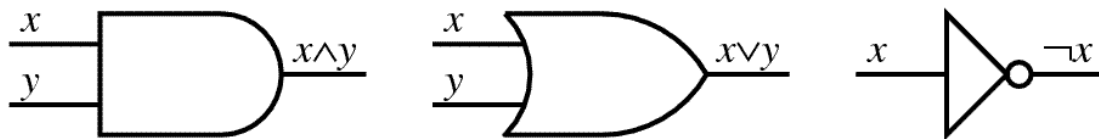


Figure 3. Logic gates

- ◆ E le due porte logiche corrispondenti alle **due leggi di De Morgan**:

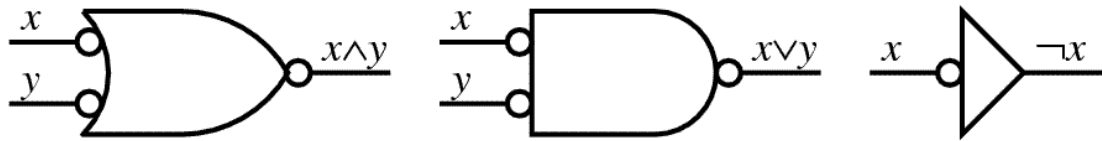


Figure 4. De Morgan equivalents

- ◆ Per completare, il quadro, occorre inserire anche **porta di implicazione ($\neg x \vee y$)**, recentemente implementata, sia in ingegneria elettronica, che in bioingegneria:



- ◆ Di qui il seguente schema riassuntivo di tutte le principali **operazioni logiche** di logica delle proposizioni, con i relativi **diagrammi di Venn**, in quanto tutte incluse nel corrispondente **diagramma di Hasse**:

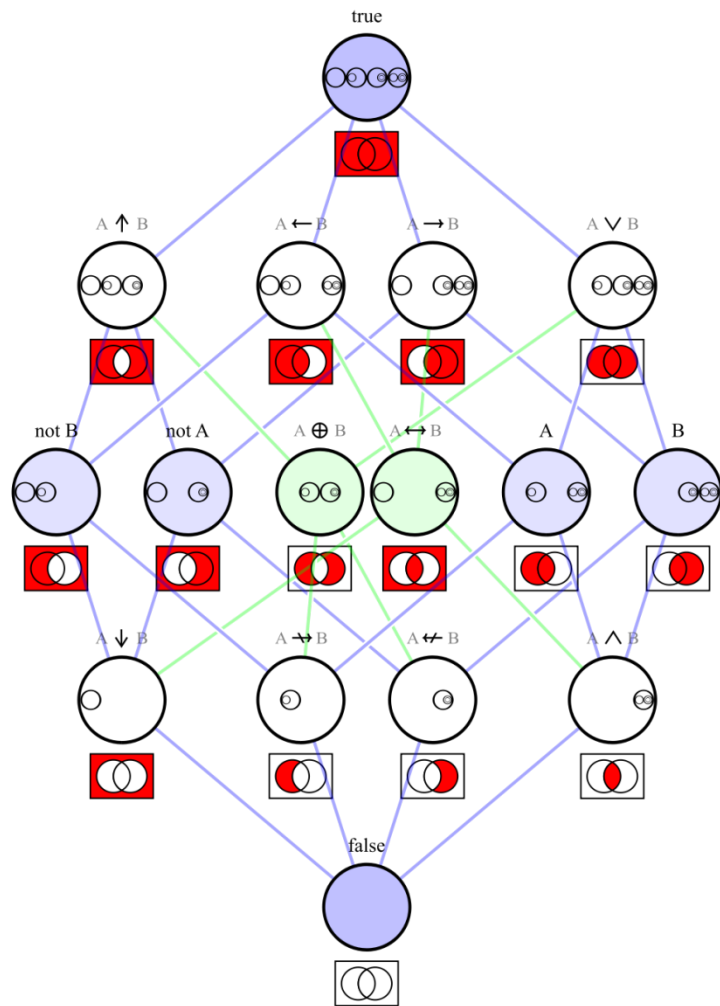


Figura 5 (cfr. Figura 6)

7.4. La logica di Boole nella cosiddetta “era di Stone”

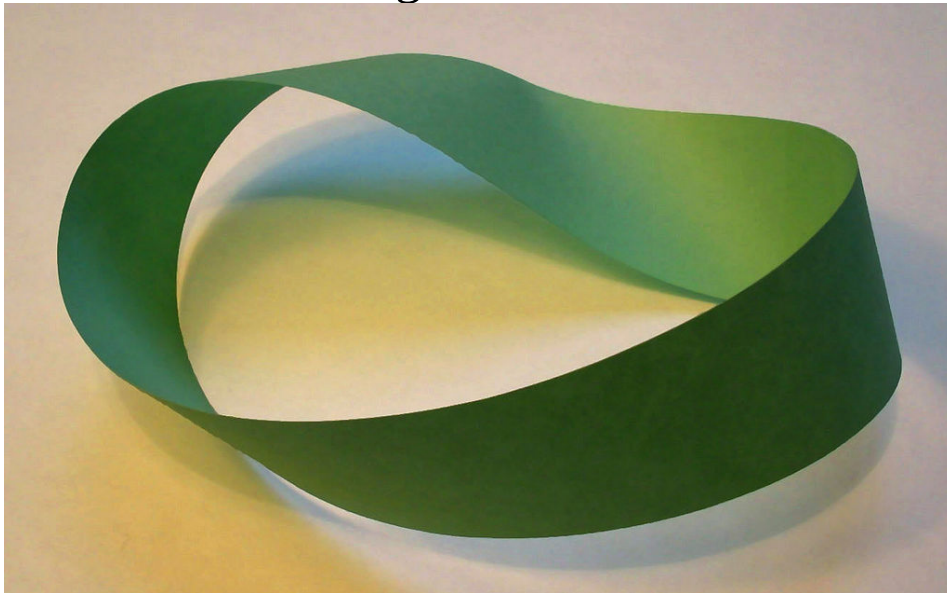
7.4.1. Spazi topologici e insiemi aperti e chiusi

- ◆ Per comprendere il fondamentale **teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole** dobbiamo prima introdurre alcune nozioni fondamentali di **topologia**.
- ◆ **Storicamente**, la topologia come fondamentale branca della matematica, risale alla *analysis situs* di Leibniz come studio di determinate **proprietà qualitative** degli spazi geometrici, essendo il *situs* (in quanto distinto dalla categoria dello *spazio*) una delle dieci **categorie aristoteliche** con cui lo Stagirita designava relazioni di ordine fra enti non riducibili a quelle spaziali o temporali (p.es., nella Scolastica, le diverse gerarchie di enti anche spirituali (angeli) occupavano differenti “siti”).
- ◆ Nell’uso moderno, la topologia può definirsi formalmente come *Lo studio delle proprietà qualitative di un certo tipo di oggetti (chiamati **spazi topologici**) che sono invarianti sotto un certo tipo di trasformazioni (chiamate*

*mappe continue), specialmente quelle proprietà che sono a loro volta invarianti sotto un certo tipo di trasformazioni (chiamate **omeomorfismi** – da non confondersi con gli **omomorfismi** che sono invece **mappe** che mantengono la struttura, p.es., biiezioni fra insiemi).*

- ◆ Con topologia si intende anche una determinata **struttura** imposta su un determinato insieme X che lo caratterizza come **spazio topologico** determinando certe sue proprietà come **convergenza, connessione, continuità** sotto determinate trasformazioni → generalità della nozione di “spazio topologico” come una delle nozioni più unificanti nell’attuale matematica.
- ◆ L’intuizione fondamentale che sta dietro alla topologia è che alcuni problemi geometrici non dipendono dalla forma degli oggetti, ma dal modo in cui le parti sono **connesse**. → Uno dei primi lavori di topologia moderna fu la pubblicazione di L. Eulero sui “sette ponti di Königsberg” che dimostrava come non fosse possibile disegnare un tragitto continuo che li attraversasse tutti passando su ognuno una sola volta. Un’impossibilità che dipendeva non dalla loro lunghezza o distanza, ma dalla **connettività**: da come connettevano isole e rive del fiume.

- ◆ Così costituisce un famoso esempio di **omeomorfismo** o di deformazione continua di uno spazio senza “tagli” o “incollaggi”, quella che trasforma una “ciambella” in una “tazza” e viceversa.
- ◆ Un altro esempio di deformazione continua dello spazio è quella che dà luogo alla famosa “stringa di Möbius” etc.



- ◆ In **teoria degli insiemi**, dato che una topologia definisce un particolare tipo di relazione che gli elementi dell'insieme possono avere fra di loro, differenti topologie possono definirsi sullo stesso insieme X determinando differenti **spazi**

topologici. P.es., **la retta dei numeri reali, il piano complesso e l'insieme di Cantor** possono essere pensati come uno stesso insieme con differenti topologie.

◆ Formalmente, sia X un insieme e sia τ una famiglia di sottoinsiemi di X . τ si definisce come **topologia su X** se:

1. Sia **l'insieme vuoto che l'insieme X** sono elementi di τ ;
2. Ogni **unione** di elementi di τ è elemento di τ ;
3. Ogni **intersezione** di un numero finito di elementi di τ è elemento di τ .

◆ Se τ è una topologia su X , allora la coppia (X, τ) è definita uno **spazio topologico**.

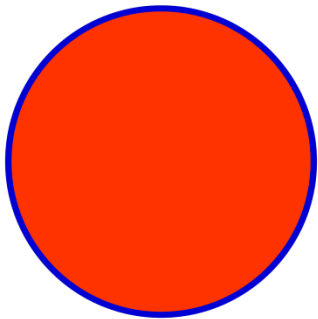
◆ I membri di τ sono definiti **insiemi aperti** di X . Un sottoinsieme di X è definito **chiuso** se il suo complemento è in τ (cioè se il suo complemento è aperto).

Quindi, un sottoinsieme di X può essere: aperto (**opset**), chiuso (**closet**), o ambedue (**clopset**), o nessuno dei due.

◆ Infatti, le due nozioni di insieme “aperto” e “chiuso”, sebbene **complementari**, **non sono mutualmente esclusive**: un insieme aperto può essere infatti chiuso da un altro insieme aperto, essere cioè un clopset.

◆ L'insieme X e l'insieme vuoto sono sempre clopset. Un opset che contiene un punto x è definito come **un intorno di x** .

- ◆ Per familiarizzarci con la nozione di opset, possiamo concentrarci intuitivamente sui punti che definiscono un cerchio.



- ◆ I punti (x, y) che soddisfano $x^2 + y^2 = r^2$ sono colorati in blue e formano un insieme di confine. I punti che soddisfano $x^2 + y^2 < r^2$ sono colorati in rosso e formano un insieme aperto. L'unione dei punti in rosso e in blue sono un insieme chiuso: il cerchio.
- ◆ Il concetto di **insieme aperto** è in ultima analisi una generalizzazione del concetto di **intervallo fra due numeri** sulla retta dei reali. P.es., l'intervallo $[0,1]$ (inclusi gli estremi) è un intervallo (insieme) **chiuso** sulla retta dei numeri razionali, $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

- ◆ Invece, è un intervallo (insieme) **aperto** sulla retta dei reali $(0,1) \cap \mathbb{R}$. Dove si noti il simbolismo (x,y) per denotare insiemi aperti $[x,y]$ per denotare insiemi chiusi, $(x,y]$ per denotare un clopset aperto a sinistra, $[x,y)$ per denotare un clopset aperto a destra, etc.
- ◆ Infine, distinguiamo vari tipi di spazi topologici secondo le diverse proprietà che li caratterizzano, assiomaticamente definiti.
- ◆ Per concludere, i concetti di opset e spazio topologico sono estremamente duttili e si prestano a differenti assiomatizzazioni, una di queste è quella fondamentale per noi legata al teorema di Stone per le algebre di Boole.

7.4.2. Teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole

- ◆ Molti sviluppi della TCS negli ultimi decenni dipendono dal fondamentale contributo del matematico americano Marshall H. Stone (1903-1989) col suo famoso **teorema di Stone** (1936)², più esattamente il suo **teorema di rappresentazione per algebre di Boole** – dove, con “rappresentazione” s’intende in matematica un **isomorfismo o corrispondenza biunivoca** (biiettiva e

reversibile nel caso di insiemi) fra due strutture con i loro oggetti, tale che l'una può dirsi rappresentazione dell'altra.

- ◆ Un risultato cui Stone fu portato da un altro, precedente teorema, che lo rese famoso perché su di esso si fonda il formalismo della MQ, il cosiddetto **teorema di Stone-Von Neumann** (1931), fondamentale per il formalismo della meccanica quantistica (QM), in quanto basato sugli spazi di Hilbert.
- ◆ Il legame fra i due teoremi è dato dal fatto che **le topologie** che soggiacciono alle algebre associate agli spazi di Hilbert – le cosiddette **C*-algebre** – e quelle delle rappresentazioni per algebre di Boole **sono le stesse**.
- ◆ Il risultato del 1936 fu dunque di altrettanta importanza nella TCS, quanto quello del 1931 per la QM tanto che gli studiosi parlano di una “nuova era” nella TCS, **l'era di Stone**, o *the Stone Age*, appunto, con uno scherzoso gioco di parole (tutt'altro che una “età della pietra”...), inaugurata da questo teorema nel campo dello studio delle logiche di Boole e quindi dell'intera logica, sia algebrica, che matematica, che computazionale, che filosofica, come vedremo³.

- ◆ Sostanzialmente il teorema introduce **quell'equivalenza fra un'algebra di Boole e un reticolo definito** su un insieme parzialmente ordinato. Un'equivalenza che già abbiamo ricordato nell'illustrazione iniziale della logica di Boole in §4.2.
- ◆ L'enunciato rigoroso del teorema di Stone e più ancora la sua dimostrazione sono al di là delle nostre possibilità. Intuitivamente si può dire che esso associa un'algebra di Boole B al suo **spazio topologico** $S(B)$, chiamato **spazio di Stone**.
- ◆ Come sappiamo, con “topologia” o “spazio topologico” si intende in matematica **un insieme di punti con i loro intorni** che soddisfano determinati assiomi, innanzitutto quello di essere uno spazio “senza strappi” e senza necessariamente avere una metrica definita su di esso. Generalmente condizioni soddisfatte dall'essere uno spazio topologico definito su insiemi aperti.
- ◆ Ed infatti $S(B)$ è generato da una **base** – ovvero, una collezione di insiemi chiusi-aperti (clopsets) tale che ognuno degli elementi dello spazio può essere scritto come unione di elementi della base – che consiste di tutti insiemi della forma:

$$\{x \in S(B) \mid b \in x\}$$

Dove b è un elemento di B .

- ◆ I punti in $S(B)$ sono **gli ultrafiltri su B** , o equivalentemente **gli omomorfismi da B ad un'algebra di Boole a due elementi**. Cerchiamo di capire almeno intuitivamente questa definizione perché importante per noi.
- ◆ Un ultrafiltro è un **filtro massimale** di un dato insieme, ovvero il massimo sottoinsieme parzialmente ordinato (= **massimo filtro**) dell'insieme-potenza di un dato insieme (Cfr. **Figura 6**).
- ◆ Per esempio, dato il reticolo P che rappresenta l'insieme potenza dell'insieme S di 4 elementi $\{1,2,3,4\}$, ordinato in base alle inclusioni in un grafico di Hasse, i sottoinsiemi indicati in verde nella figura costituiscono un ultrafiltro a partire dall'**elemento principale** $\uparrow\{1\}$, dove con $\uparrow$ si denota che tutti gli insiemi del filtro sono “chiusi verso l'alto”. Sono cioè insiemi aperti (intersezioni) chiusi da altri insiemi aperti (intersezioni), sono cioè dei clopset.

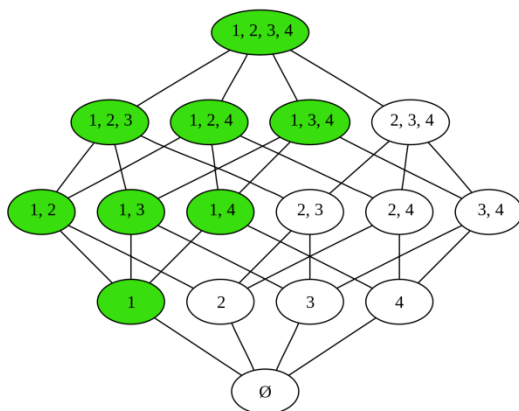


Figura 6 (Cfr. Figura 5)

- ♦ Tornando al nostro ultrafiltro, più in generale, dato un insieme S si può definire sull'insieme potenza di S $\mathcal{P}(S)$ un ordinamento parziale per inclusione $\subseteq$ che ne fa un reticolo come in Figura 6, ovvero $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Si definisce **ultrafiltro** U il filtro F massimale (ovvero quello di cui non se ne può definire uno più grande: gli insiemi colorati in verde in figura) tale che:
1. S è in F , e se A e B sono in F così la loro intersezione ($= F$ è chiuso sotto intersezione finita);
 2. L'insieme vuoto non è in F ($= F$ è un filtro proprio);

3. Se A è in F e A è un sottoinsieme di B , allora anche B è in F per tutti i sottoinsiemi di S (F è chiuso verso l'alto $\uparrow$ (*upset*)).

- ◆ Infine, il filtro minimale che contiene un dato elemento p o **elemento principale** è detto **filtro principale** e consiste nell'insieme $\{x \text{ in } F \mid p \leq x\}$ ed è denotato usando come prefisso $\uparrow p$. Nell'esempio in figura, l'elemento principale è $\uparrow\{1\}$.
- ◆ Il **duale** di un filtro è definito l'**ideale** I , più esattamente, in teoria degli insiemi, l'**ideale primo** che si ottiene semplicemente **invertendo tutte le relazioni** in F , ovvero $x \leq y$ con $x \geq y$, sostituendo intersezioni con unioni, e quindi $\wedge$ con $\vee$. Il che ci riporta alle leggi di De Morgan. In questo caso, l'elemento principale p contenuto nell'**ideale principale** denotato come $\downarrow p = \{x \text{ in } I \mid x \leq p\}$, nel nostro caso in **Figura 6**, l'ideale principale sarà: $\downarrow\{1,2,3,4\}$.
- ◆ Un ideale è dunque costituito di inclusioni fra unioni di sottoinsiemi aperti **chiusi verso il basso** (I è chiuso verso il basso $\downarrow$ (*downset*)). Di qui la definizione che uno spazio di Stone associabile ad un'algebra di Boole è sempre costituito di **clonset**.
- ◆ In altri termini, duale di un ultrafiltro è un **ideale massimale** che intuitivamente consisterà nel “leggere” (ordinare) dall'alto in basso l'ultrafiltro colorato in verde

in **Figura 6**. In teoria degli insiemi, dunque, un ideale è il duale di un filtro, e un **ideale massimale** è il duale di un **ultrafiltro**.

- ◆ Ora, nel caso di un'algebra di Boole B nell'insieme S per ogni elemento a dell'insieme bisogna considerare anche il suo complemento $\neg a$.
- ◆ Di qui l'altra formulazione dell'enunciato del teorema di Stone, data l'algebra di Boole B , se i punti **nello spazio di Stone** $S(B)$, sono gli **ultrafiltri** su B , allora equivalentemente essi sono gli **omomorfismi** da B ad un'algebra di Boole a due elementi, ovvero un'algebra di Boole il cui **soggiacente insieme numerabile** o **universo** su cui è definita (*carrier set*) è l'insieme a due elementi così che $B = \{1,0\}$, dove con **omomorfismo** s'intende, lo ripetiamo, una **mappatura o relazione fra oggetti che preserva la struttura** fra due strutture algebriche.
- ◆ Intuitivamente, l'ultrafiltro del reticolo di **Figura 6**, nella misura in cui è uno spazio di Stone, è omomorfo al reticolo di **Figura 5** che rappresenta tutte le operazioni logiche soddisfacenti da un'algebra di Boole a due elementi. Per rendersene conto, basta ricordare che l'ideale principale – corrispondente al **supremo** del reticolo booleano associato a $S(B)$, ovvero $\downarrow\{p\}$ – sarà la

disgiunzione sempre vera ($0 \vee 1$), mentre il filtro principale – corrispondente all'**infimo** del suddetto reticolo $\uparrow\{p\}$ – sarà la congiunzione sempre falsa ($0 \wedge 1$).

- ◆ Per concludere la nostra disanima del teorema di Stone, soffermiamoci ancora sulle proprietà dello spazio di Stone $S(B)$ in quanto “spazio topologico discreto”. Propriamente esso si definisce come uno spazio **compatto** (non nel senso di uno spazio geometrico costituito di “chiusi” e “limitati”, ma nel senso topologico perché ciascuna delle sue coperture “aperte” ha una “sotto-copertura” finita), **totalmente disconnesso** (in uno spazio topologico solo gli insiemi a un solo punto (l'insieme unitario e l'insieme vuoto) sono connessi)), **di Hausdorff** (i suoi punti hanno intorni disgiunti).
- ◆ Infine il teorema di Stone afferma la **dualità categoriale fra spazi di Stone e algebre di Boole**. Infatti data un'algebra di Boole B e un'algebra di Boole A ad esse sono associati gli spazi di Stone $S(B)$ e $S(A)$. La dualità fra queste due categorie di strutture è data dal fatto che, data una funzione continua da $S(B)$ a $S(A)$, ad essa corrisponde una funzione monotona in senso inverso da A a B .
- ◆ In ogni caso il teorema di Stone è definito su **insiemi standard** e quindi la sua prova richiede **l'assioma di scelta** almeno in una sua forma più debole. Ovvero, il

cosiddetto **teorema dell'ideale primo booleano**, un principio di scelta indebolito che afferma che ogni algebra di Boole ha un ideale primo.

- ◆ Questa osservazione apre la strada alla dimostrazione dell'esistenza di una dualità in termini di teoria delle categorie fra un **algebra di Boole** e la sua **coalgebra funtoriale su spazi di Stone** che, in quanto definiti su **insiemi non-standard di Aczel**, consente di definire omomorfismi funtoriali e quindi verità locali, per mapping dalla struttura della coalgebra sulla relativa algebra di Boole.
- ◆ Questo significa un drammatico arricchimento della semantica delle algebre di Boole, dalla logica matematica alla logica modale e dunque anche filosofica.
- ◆ Infatti, le **logiche modali** hanno una naturale formalizzazione insiemistica – in particolare in TCS e nell'ontologia della QFT applicabile dalla microfisica alla fisica della materia condensata, sistemi biologici e neurofisiologici inclusi – in termini **coalgebrici**, e non solo in termini di logiche del secondo ordine, come di solito è stato fatto:
 - 1. In fisica**, mediante una modellizzazione in termini di meccanica statistica dei sistemi quantistici anche in termodinamica quantistica;

2. In logica filosofica, mediante modellizzazione attraverso logiche del secondo ordine⁴.

- ◆ Tutto questo ci porta a comprendere **la necessità dell'uso della TC** per affrontare le tematiche più avanzate sia in fisica quantistica che in teoria della computabilità effettiva (*computer science*), al loro più alto livello teoretico, con ricadute immediate sul campo applicativo.

8. ALCUNI ELEMENTI DI TEORIA DELLE CATEGORIE (TC) (Abramsky & Tzevelekos, 2011)

8.1. Alcune nozioni fondamentali della TC

- ♦ Il punto di partenza è che in TC gli oggetti fondamentali non sono “elementi” nel senso insiemistico del termine. In TC essi sono comunque interpretati ***sempre*** come domini-codomini di “frecce” o “morfismi” – p.es., “funzioni” nel caso di insiemi, “operatori” nel caso di spazi, “mappe”, etc.
- ♦ In altri termini, la TC è un **linguaggio universale assiomatico** per le scienze matematiche e logiche in qualche modo più generale di quello costituito dalla teoria degli insiemi mediante cui si possono individuare **relazioni strutturali** fra teorie non individuabili altrimenti.

- ◆ I **primitivi** della TC sono infatti: 1) **morfismi o frecce** f, g ; 2) **composizioni** di morfismi $f \circ g$; 3) due **mappe** $dom(\bullet), cod(\bullet)$ che assegnano domini e codomini rispettivamente ad ogni freccia o morfismo.
- ◆ In tal modo una **categoria** è “qualsiasi struttura in logica o matematica con morfismi che preservano la struttura”.
- ◆ Ogni **categoria** è dunque costituita da:
 - Una collezione di **oggetti** (morfismi riflessivi), $A, B, C, \dots$;
 - Una collezione di **frecce**” o **morfismi**, $f, g, h, \dots$;
 - Due collezioni di **mappe dom, cod** che assegnano a ciascuna freccia il suo “dominio” (punto di partenza) e il suo “codominio” (punto di arrivo) di oggetti;
 - Per ogni tripla di oggetti, A, B, C , una **mappa di composizione** $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, scritta come $g \circ f$ (o talvolta: $f; g$), dove B è codominio di f e dominio di g ;
 - Per ogni oggetto A , un **morfismo riflessivo** che ha lo stesso oggetto come dominio e codominio, $A \rightarrow A$, e dunque costituisce una **relazione di identità**, Id_A .
- ◆ Perciò, sono altrettante categorie alcune fondamentali strutture logiche e matematiche (denotate col termine inglese): **Set** (insiemi e funzioni); **Grp** (gruppi

e omomorfismi); **Top** (spazi topologici e funzioni continue); **Pos** (insiemi parzialmente ordinati (*partially ordered sets*) e funzioni monotone (=sempre crescenti o sempre decrescenti)); **Vect** (spazi vettoriali definiti su campi numerici e funzioni lineari); etc.

- ◆ Come sappiamo, la categoria dei **Pos** è fondamentale in logica. Infatti, l'ordinamento parziale è una struttura di relazioni di ordinamento, $\leq$, fra insiemi che soddisfano simultaneamente:
 - $x \leq x$ (Riflessività)
 - $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisimmetria)
 - $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitività)
- ◆ La struttura dello “ordinamento totale di insiemi”, e la relativa categoria **Tos** di insiemi totalmente ordinati, soddisfa Antisimmetria e Transitività, ma invece della Riflessività soddisfa la relazione di Totalità degli ordinamenti:
 - $x \leq y \vee y \leq x$ (Totalità)
- ◆ Cioè la relazione di ordinamento deve essere soddisfatta fra **tutti** gli insiemi della teoria. Nondimeno, la categoria **Tos** manca di un oggetto rispetto a **Pos** perché la relazione di ordinamento $\leq$ che **Tos** usa non è più un oggetto in essa perché non

soddisfa alla riflessività come in **Pos**. Pertanto, **Tos** è una sottocategoria di **Pos**. Infatti, posets fondamentali sono l'insieme dei reali $(\mathbb{R}, \leq)$, oppure l'insieme potenza $\mathcal{P}$ di un dato insieme X $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

- ◆ Una notazione importante è che per giustificare **l'ordinamento totale** degli insiemi ho bisogno di una semantica del **secondo ordine**, per giustificare ordinamenti parziali ci bastano semantiche del **primo ordine**.
- ◆ I morfismi tra categorie si definiscono col nome di **funtori**, F , ovvero operazioni che mappano oggetti e frecce da una categoria **C** all'altra **D**, $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, in modo **da preservare composizioni e identità**.
- ◆ In tal modo fra le due categorie esiste un **omomorfismo o identità di struttura**, corrispondente.
- ◆ P.es., nel caso di insiemi, una relazione **biiettiva** “uno-a-uno” sia iniettiva che suriettiva (o dalla loro composizione), fra oggetti e morfismi che arriva fino **all'isomorfismo (*homomorphism up to isomorphism*)**, cioè fino alla biunivocità delle biiezioni nelle due direzioni fra **tutti** gli elementi dei due insiemi,

naturalmente **se l'omomrfismo è invertibile**. L'equivalenza ($\leftrightarrow$) fra insiemi totalmente o parzialmente ordinati è infatti un classico esempio di isomorfismo.

- ◆ Generalmente, un funtore F è **covariante**, ovvero mantiene il verso delle frecce e l'ordine delle composizioni. Quindi:

se $f : A \rightarrow B$, allora $FA \rightarrow FB$; se $f \circ g$, allora $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$;

e se id_A , allora $Fid_A = id_{FA}$.

- ◆ Le due categorie, **C**, **D**, sono però ugualmente omomorfe fino all'isomorfismo se il funtore G che le connette è **controvariante** ovvero inverte il verso delle frecce e l'ordine delle composizioni, l'unico morfismo a rimanere invariato essendo quello dell'identità che preserva gli oggetti, $G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}^{op}$. Quindi:

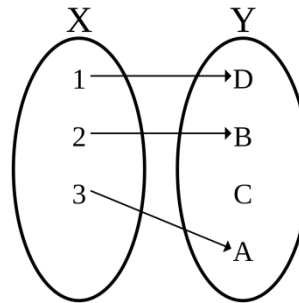
se $f : A \rightarrow B$, allora $GB \rightarrow GA$; se $f \circ g$, allora $G(g \circ f) = Gg \circ Gf$;

ma se id_A , allora $Gid_A = id_{GA}$.

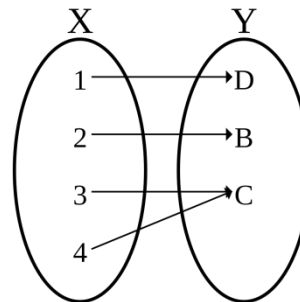
- ◆ $\rightarrow$ È così molto importante non confondere l'uso delle medesime nozioni/termini in teoria degli insiemi, algebra e TC, anche se l'esemplificazione insiemistica di nozioni di TC può aiutare. Per esempio, morfismo in matematica insiemistica è

sinonimo di **funzione** ovvero di “relazione che pone in corrispondenza (*mapping*) oggetti del dominio e del codominio”. I principali morfismi in questo senso (= funzioni, $f: X \rightarrow Y$) sono:

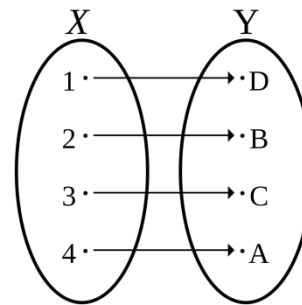
1. **Iniettivi (uno-al-massimo-uno)**: ovvero iniettivi senza essere suriettivi, se ogni elemento del codominio è relato al massimo con un elemento del dominio



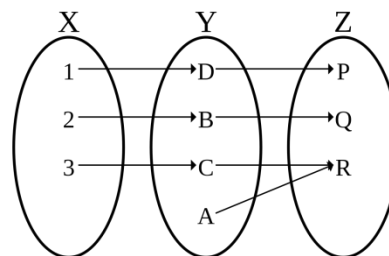
2. **Suriettivi (uno-al-minimo-uno)**: ovvero suriettivi senza essere iniettivi, se ogni elemento del codominio è relato almeno ad un elemento del dominio:



3. **Biiettivi (iniettiva e suriettiva)**: se ogni elemento del codominio è relato esattamente a un elemento del dominio (= uno-a-uno senza essere biunivoca):



- ◆ Generalmente esiste una stretta relazione fra **biiettività e cardinalità degli insiemi**: due insiemi fra i quali è possibile definire una relazione biiettiva fra i loro elementi hanno **la medesima cardinalità** e se omomorfi saranno anche **isomorfi**.
- ◆ Un caso interessante è la composizione biiettiva fra due funzioni:
 $(f: X \rightarrow Y \circ g: Y \rightarrow Z)$



Schema 1

- ◆ La prima relazione non necessita di essere suriettiva e la seconda non necessita di essere iniettiva, quindi gli insiemi considerati **non hanno la medesima cardinalità**, sebbene il punto di partenza e di arrivo della relazione composta soddisfino una **relazione biiettiva**.
- ◆ Nella **categoria degli insiemi**, le relazioni iniettiva, suriettiva, biiettiva, corrispondono rispettivamente a **monomorfismo**, **epimorfismo** e **isomorfismo** fra oggetti e strutture della medesima categoria.
- ◆ Per completare il quadro degli omomorfismi bisogna aggiungerne altri due principali: l'**endomorfismo** fra una struttura algebrica e se stessa e l'**automorfismo**, ovvero, un endomorfismo che è anche un **isomorfismo**. Il seguente schema sintetizza le relazioni di inclusione/intersezione fra tutti questi **insiemi di relazioni omomorfe**:

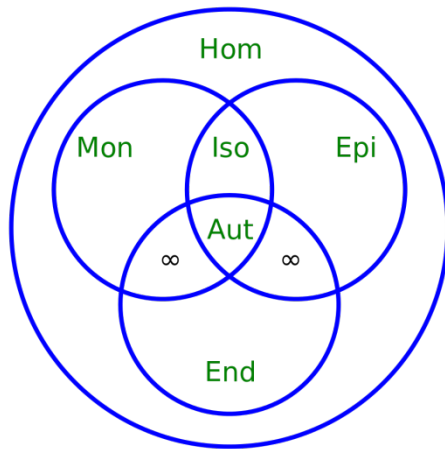


Figura 7

- ◆ Particolarmente interessante per i nostri scopi sono le intersezioni **$\text{End} \cap \text{Epi} \setminus \text{Aut}$** , cioè endomorfismi che sono epimorfismi senza essere automorfi e quindi **isomorfi**, correlativamente **$\text{End} \cap \text{Mon} \setminus \text{Aut}$** che riguardano ambedue **strutture infinite**, ∞ , le quali, ovviamente, non possono essere definite su **insiemi standard** in quanto presuppongono **inclusioni infinite** fra insiemi e/o **autoinclusioni infinite** fra insiemi (rispettivamente, suriettività (**Epi**) iniettività (**Mon**) infinite). Suppongono cioè **insiemi non-standard**, nello specifico gli **insiemi non-benfondati**, come vedremo subito.

- ◆ In sintesi, è possibile fondare **omomorfismi biiettivi** in quanto composizioni di monomorfismi ed epimorfismi che non sono **isomorfismi**.

8.2. La centralità della dualità in TC e semantica

- ◆ Attraverso la nozione di funtore controvariante, possiamo introdurre perciò la nozione di **dualità di categorie**. Ovvero data una categoria $\mathbf{C}$ e l'endofuntore $E: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, un funtore, cioè, che pone in relazione strutture appartenenti alla medesima categoria, l'applicazione controvariante di questo funtore su tutti i morfismi e le composizioni legherà la categoria $\mathbf{C}$ alla sua opposta $\mathbf{C}^{op}$, cioè, $E^{op}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{op}$. Ciò significa che esiste un **omomorfismo fino all'isomorfismo** fra $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{op}$ attraverso E . Su queste basi è possibile dimostrare **l'equivalenza duale** fra categorie, in simboli: $\mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C}^{op}$.
- ◆ La dualità in TC è pertanto la corrispondenza fra la proprietà della categoria $\mathbf{C}$ e quelle della sua opposta. In logica, è evidente che si può così formalizzare nel modo più generale la teoria della verità come **corrispondenza** inclusa la teoria

tommasiana ontologica della verità come *adaequatio* nei due versi della relazione compositazionale intelletto-cosa-intelletto, che illustreremo nell'ultima parte.

- ◆ Più specificamente, nella semantica della TC la dualità come tale significa che dato un asserto α definito nella categoria $\mathbf{C}$, scambiando dominio e codominio di ogni morfismo come pure l'ordine delle composizioni fra morfismi, si può ottenere un asserto duale al primo, α^{op} , nella categoria $\mathbf{C}^{\text{op}}$. Cioè α è vero *se e solo se* α^{op} è vero.
- ◆ In altri termini, la dualità come tale è l'asserto che **la verità/falsità è invariante** sotto queste operazioni di scambio sugli asserti, essi cioè sono **dualmente equivalenti**. In simboli: $\alpha \rightleftharpoons \alpha^{\text{op}}$, come distinto dall'ordinaria equivalenza della tautologia logica: $\alpha \leftrightarrow \beta$ fra asserti della medesima categoria (o di categorie legate da funtori covarianti).
- ◆ È importante sottolineare che nella semantica insiemistica la categoria duale **Set^{op}** è più significativa della categoria **Set**, dato che un generico condizionale in logica “se...allora”, p.es., “per tutti gli x se x è cavallo, allora è mammifero ($\supset$) è vero se

e solo se l'insieme dei cavalli con tutti i suoi sottoinsiemi è incluso ($\subseteq$) nell'insieme dei mammiferi”.

- ◆ Il che significa che in generale la semantica di una data proposizione è definita insiemisticamente sull'insieme-potenza $\mathcal{P}(X)$ di un dato insieme X .
- ◆ Categorialmente, infatti, il funtore insieme potenza $\mathcal{P}$ è un endofuntore covariante $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, che mappa ogni insieme X sul suo insieme-potenza $\mathcal{P}(X)$, e manda ognifunzione su X , $f: X \rightarrow Y$ alla mappa che manda $U \subseteq X$ alla sua immagine $f(U) \subseteq Y$, cioè:

$$X \mapsto \mathcal{P}(X), \quad (f: X \rightarrow Y \mapsto \mathcal{P}(f) := S \mapsto \{f(x) \mid x \in S\})$$

- ◆ Viceversa, il funtore controvariante $\mathcal{P}^{\text{op}}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ manda ogni funzione $f: X \rightarrow Y$ alla mappa che manda $V \subseteq Y$ alla sua immagine inversa $f^{-1}(V) \subseteq X$, ovviamente preservando tutti gli oggetti:

$$\mathcal{P}^{\text{op}}(X) := \mathcal{P}(X); \quad \mathcal{P}^{\text{op}}(f: X \rightarrow Y) \mapsto \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X) := T \mapsto \{x \in X \mid f(x) \in T\}$$

- ◆ Praticamente, è come se partendo dal codominio **si coinduce la(e) funzione(i) e i(l) relativo(i) domini(o)** che manda(no) a quel codominio.
- ◆ Inoltre, vi sono tutta una serie di **fondamentali costruzioni duali** che possono essere formalizzate nella TC e che non possiamo definire qui, ma che hanno tutte un significato immediato per noi, perché sia **il formalismo topologico della fisica quantistica**, che della **computazione quantistica** offrono diverse esemplificazioni del loro uso.
- ◆ Per esempio, le nozioni di funtori/operatori (auto-)aggiunti “di destra” o “di sinistra”, di universalità (unicità) e co-universalità, di prodotti e co-prodotti e le nozioni connesse di algebre e coalgebre funtorialmente duali, di limiti e co-limiti interpretati rispettivamente come oggetti finali e iniziali di due categorie poste in relazione da una terza categoria di funtori di indicizzazione, così da garantire il mappaggio, per mezzo di un funtore diagonale di tutti gli oggetti e i morfismi di una categoria nell'altra, etc.
- ◆ Praticamente, **tutti gli oggetti e le operazioni** che sono utilmente formalizzati in **teoria degli insiemi**, e quindi nel calcolo e nella logica, e molti altri ancora, **possono essere formalizzati in TC** – inclusa la fondamentale operazione di

esponenziazione per costituire spazi funzionali, e le conseguenti **funzioni di valutazione (V/F) su domini di funzioni**. Vedremo esempi di tutto questo nella formalizzazione categoriale della QFT...

- ◆ Esiste tuttavia **una fondamentale distinzione** fra la formalizzazione insiemistica e categoriale delle stesse nozioni.
- ◆ Invece di considerare **oggetti ed operazioni per ciò che “sono”** come in teoria degli insiemi, in TC **li consideriamo per ciò che essi “fanno”** (Abramsky & Tzevelekos, 2011, p. 53), così da soddisfare formalmente – per i nostri scopi – la **primazia della prammatica sulla sintassi e la semantica** che l’interpretazione semiotica della logica di Moore ha mutuato dal suo maestro Peirce.
- ◆ Per concludere, possiamo dire che la TC **completa dandogli forma assiomatica** ciò che manca all’approccio di Peirce, è che ha fatto sì che il suo contributo alla storia del pensiero logico e matematico moderno, della sua idea della logica come **semiotica formale** fosse per quasi un secolo meno riconosciuto di quelli di Frege, di Whitehead, di Russell e dei loro discepoli.
- ◆ Questo, sebbene logici del valore di **un Lewis e di un Tarski** abbiano riconosciuto la sua eccellenza già nel secolo scorso.

8.3. La “Coalgebra Universale” come teoria generale dei sistemi dinamici e la giustificazione del bicondizionale ontologico

8.3.1. Insiemi non-benfondati e la Coalgebra Universale

8.3.1.1. *Le origini: infinite inclusioni*

- ◆ L'intuizione che soggiace alla **teoria degli insiemi non-benfondati di Peter Aczel** (*non-wellfounded sets, NWFS*) che qui esamineremo fu originariamente ispirata dalla «**Teoria Base degli Insiemi**» di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici del XX secolo, nei suoi famosi seminari sui Fondamenti della Matematica alla Scuola Normale Superiore di Pisa.
- ◆ Ennio De Giorgi fu anche **ispiratore e fondatore di IRAFS alla PUL**, con i professori Edward Nelson di Princeton e Gianfranco Basti della PUL, per estendere alla filosofia formale queste idee (scarica articolo sulla teoria di De Giorgi dal portale IRAFS: http://irafs.org/irafs_1/texts/Articolo%20Forti.pdf e l'ultimo articolo da lui scritto per IRAFS prima di morire [“Verso i sistemi assiomatici del 2000”](#)).

- ◆ Altri lavori sull'iniziale ricerca sui fondamenti all'IRAFS possono trovarsi nel primo sito di [IRAFS I](#), alla pagina dei download).
- ◆ La prematura morte del prof. De Giorgi (1996) bloccò sul nascere questo programma a IRAFS che poi è cresciuto per suo conto nel resto del mondo, innanzitutto con i lavori di Marco Forti e poi con quello di Aczel a conferma della sua bontà ed effettività. Cfr. sulla questione (Sangiorgi 2012b, 19ss.)⁵.
- ◆ L'intuizione comune a tutti questi autori consiste nel consentire in teoria degli insiemi la possibilità di **un'illimitata catena di inclusioni** che, nelle originarie intenzioni filosofiche di De Giorgi consentisse di separare omomorfismi da isomorfismi (cfr. **Figura 7**) e quindi di studiare “il principio di forma” *qua talis* (De Giorgi era un platonico convinto), e nelle intenzioni più applicative di tutti coloro cui sta a cuore la TCS – De Giorgi incluso – aprisse alla semantica algebrica del primo ordine e alla teoria della computabilità **effettiva** (“la matematica che serve” amava definirla De Giorgi) sconfinite praterie applicative, innanzitutto per affrontare in computer science **l'infinità dei data stream** che è la **sfida computazionale fondamentale di questo inizio di XXI secolo**, come di fatto è stato.

- ◆ Una inaspettata ma congruente ulteriore prospettiva di quest'approccio si è recentemente aperta in QFT **modellizzata coalgebricamente**, per affrontare formalmente il **problema delle infinite rotture di simmetria del vuoto quantistico** e quindi degli **infiniti gradi di libertà della QFT** legati al famoso “teorema di Haag” (1959) in termodinamica quantistica e che non può essere affrontata coi formalismi classici della meccanica statistica se non a patto di **un pesante intervento dell'osservatore** (definizione della base ortonormale degli spazi di Hilbert...).

8.3.1.2. Assioma di anti-fondazione (anti-foundation axiom, AFA)

- ◆ Peter Aczel alla fine degli anni '80 dello scorso secolo ha inteso perseguire questo scopo nella maniera più diretta possibile, mediante la rimozione dell'**assioma di fondazione** da ZF – presente comunque in forme differenti in tutte le teorie (per questo definite “standard”) degli insiemi – proponendo una teoria degli insiemi basata sull'**assioma di anti-fondazione** (*anti-foundation axiom, AFA*).
- ◆ L'assioma di fondazione in ZF prende di solito il nome di **assioma di regolarità**, ed afferma in buona sostanza che ogni insieme non-vuoto A contiene un elemento disgiunto da A . Nella logica del primo ordine, questo assioma si legge:

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (y \cap x = \emptyset))$$

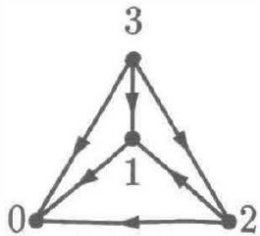
- ◆ Questo significa che nessun insieme ben-fondato x può includere se stesso perché contiene sempre un elemento disgiunto y , e che quindi non è ammessa alcuna catena infinita di inclusioni, così da poter essere totalmente ordinati.
- ◆ Attraverso l'**assioma di scelta** in ZFC (ZF + assioma di scelta (*choice*)) – come pure con forme più deboli di esso come il Lemma di Zorn: quello che Stone ha dovuto usare per garantire il duale di un ultrafiltro, il primo ideale (cfr. §5.3.2) – il risultato può essere **invertito**: se non vi sono queste infinite sequenze, allora l'assioma di regolarità è vero.
- ◆ → «Il termine “insieme non-benfondato” si riferisce a insiemi che **contengono se stessi come membri** e, più generalmente sono parti di un'**infinita sequenza di insiemi** ognuno dei quali è elemento dell'insieme precedente. Così essi manifestano una **oggettiva circolarità** in una maniera assolutamente evidente» (Moss, 2017)⁶.
- ◆ L'assioma di anti-fondazione di Aczel afferma: “ogni grafo (che rappresenta un insieme) ha un'unica decorazione” (Aczel 1988).

- ◆ Un enunciato all'apparenza criptico, ma che è molto difficile esprimere in maniera più semplice con altre parole, ma che adesso spieghiamo.

8.3.1.3. Rappresentazione di insiemi mediante grafi

- ◆ Il punto di partenza è che ogni insieme (standard o no) può essere rappresentato come un **grafo accessibile puntato** (*accessible pointed graph (APG)*), ovvero, come un insieme di **nodi** che rappresentano i sottoinsiemi dell'insieme e **bordi** che rappresentano le **relazioni di inclusione** fra sottoinsiemi dell'insieme. Ogni bordo è dunque **una coppia ordinata** di nodi (sottoinsiemi) (n, n') .
- ◆ Se (n, n') è un bordo, allora scriverò $n \rightarrow n'$ e dirò che n' è **figlio** di n . Un **percorso (path)** è una sequenza finita o infinita $n^0 \rightarrow n^1 \rightarrow n^2 \rightarrow \dots$ di nodi $n^0, n^1, n^2, \dots$ legata da bordi $(n^0, n^1), (n^1, n^2)$. Un **grafo puntato** è un grafo con un nodo distinto chiamato il suo **punto**, di solito n^0 che rappresenta l'insieme. Un grafo puntato è **accessibile**, se per ogni nodo n esiste un percorso $n^0 \rightarrow n^1 \rightarrow n^2 \rightarrow \dots n$ dal punto n^0 al punto n . Se questo percorso è **unico**, allora questo grafo è un **diagramma ad albero** e il punto è la **radice** dell'albero. [Si noterà il rapporto con la teoria dei frame di Kripke, caratterizzata dalla relazione di **accessibilità...**].

- ◆ Nei diagrammi, il punto (= insieme) sarà sempre localizzato al **vertice**. Una **decorazione** di un grafo è l'assegnazione di un insieme a ogni nodo del grafo in modo che gli elementi dell'insieme assegnato a un nodo siano gli insiemi assegnati ai figli di quel nodo. Una **rappresentazione (picture)** di un insieme è un APG in cui l'insieme rappresentato è quello assegnato al punto (= radice o vertice del diagramma).
- ◆ Per esempio, nel caso dell'APG del numero 3, la decorazione è la seguente:



- ◆ Il nodo con l'etichetta 0 non ha figli e quindi ad esso va assegnato **l'insieme vuoto $\emptyset$** , cioè 0, in ogni decorazione. Il nodo centrale ha come solo figlio il nodo etichettato 0. Quindi in ogni decorazione, al **nodo centrale** dev'essere assegnato **l'insieme $\{0\}$** , cioè, 1.
- ◆ Ogni insieme standard o non-standard può essere rappresentato con un APG.

- ◆ Nel caso degli insiemi standard o ben-fondati vale il principio: ***ogni insieme ben-fondato ha un'unica decorazione*** → ogni APG è la rappresentazione di un **unico insieme ben-fondato**.
- ◆ Ma esistono anche rappresentazioni di **insiemi non-benfondati**. Per vedere questo, noi assoceremo a ogni insieme a la sua **rappresentazione canonica**. Ovvero, formiamo il grafo i cui nodi sono quegli insiemi che appaiono in sequenze $a^0, a^1, a^2, \dots$ tali che: $\dots \in a^2 \in a^1 \in a^0 = a$, e che abbiano come bordi quelle coppie di nodi (x, y) tali che $y \in x$.
- ◆ Si noterà che in tal modo abbiamo **invertito la condizione** per la rappresentazione ad albero dell'**insieme dall'inclusione all'appartenenza**.
- ◆ Un siffatto APG **non richiede un insieme ben fondato**. Infatti, ogni rappresentazione di un insieme **può essere dispiegato (*unfolded*) in una rappresentazione ad albero dello stesso insieme**. Ovvero, dato un APG possiamo formare l'albero i cui nodi sono i percorsi finiti che cominciano dal punto dell'APG e i cui bordi sono coppie di percorsi della forma: $a^0 \rightarrow \dots \rightarrow a$; $a^0 \rightarrow \dots \rightarrow a \rightarrow a'$; ...

- ◆ La radice di questo albero è il percorso a^0 di lunghezza uno. Questo albero è lo **svolgimento (*unfolding*)** dell'APG. Quindi, lo svolgimento di un APG rappresenterà qualsiasi insieme rappresentato dall'APG. Lo svolgimento della rappresentazione canonica di un insieme, sarà chiamato la **rappresentazione canonica ad albero** di quell'insieme.
- ◆ Da questa costruzione **l'assioma di anti-fondazione** deriva immediatamente e cioè:
 “Ogni grafo ha un'unica decorazione”
- ◆ Il fatto che ogni grafo abbia un'unica decorazione di insiemi garantisce **l'unicità e quindi l'universalità della rappresentazione grafica.**
- ◆ Allo stesso tempo, però, affermare che **ogni grafo ha un'unica decorazione di (sotto-)insiemi** non è assolutamente equivalente alla condizione che vale per gli insiemi ben-fondati e cioè che **ogni insieme ha un'unica decorazione di (sotto-)insiemi).**
- ◆ In altri termini a uno stesso insieme NWF si possono associare diverse decorazioni (di sotto-)insiemi, si possono cioè associare diversi, unici e reciprocamente irriducibili e non interscambiabili alberi (e quindi percorsi/grafi)

di inclusione di sottoinsiemi. Una condizione che dipende direttamente dal fatto che gli insiemi NWF non sono totalmente ordinati, ovvero non vale la condizione che fra una coppia qualsiasi di insiemi valga la relazione di ordinamento $\leq$.

- ◆ In questo senso dunque si dovrà dire che un super-insieme **ammette** ($\ni$), ma non **include** ($\subseteq$) i suoi sotto-insiemi il che significa che i diversi ordinamenti parziali dei sottoinsiemi dell'insieme-potenza di un dato insieme non seguono la **regola transitiva (relativa all'assioma 4 in LM)**, ma la **regola euclidea (relativa all'assioma 5 o E in LM)**.
- ◆ Questo è esattamente ciò di cui aveva bisogno la cosmologia e la biologia **evolutive** per poter formalizzare insiemisticamente in una logica **necessariamente modale** la nozione di diversi **alberi evolutivi compatibili con un'unica origine mediante processi biforcativi intrinsecamente non-lineari**.
- ◆ Ugualmente, in logica filosofica ciò è quanto avevano bisogno **metafisiche non-razionaliste (= non-univocità dell'essere) quale quella aristotelica e tommasiana** per formalizzare la nozione che da un genere le sue specie non possono essere **derivate logicamente (dedotte)**, ma **causalmente per causalità**

analogica (analogia di attribuzione) nel senso che esse **non sono implicite in (logicamente implicate da) un genere come le conclusioni nelle premesse**, perché la medesima causa è compatibile con un numero (indefinito) di effetti attraverso diversi, sebbene unici e quindi reciprocamente **irriducibili percorsi causali di derivazione-ammissibilità ($\ni$)**.

- ◆ Per questo, il duale $\in$ di un dato $\ni$ è **unico** per l'unicità del grafo causale corrispondente.
- ◆ In termini semplici, “È vero che: la classe dei cavalli appartiene ($\in$) alla classe dei mammiferi (logicamente) **se e solo se** la specie dei cavalli è ammissibile (co-appartiene) ($\ni$) dal (al) genere dei mammiferi”.
- ◆ Ciò significa che l' $\in$ di un predicato generico come “l'esser corpo” è solo **logicamente univoco**, ma è **ontologicamente analogo**, perché è compatibile con

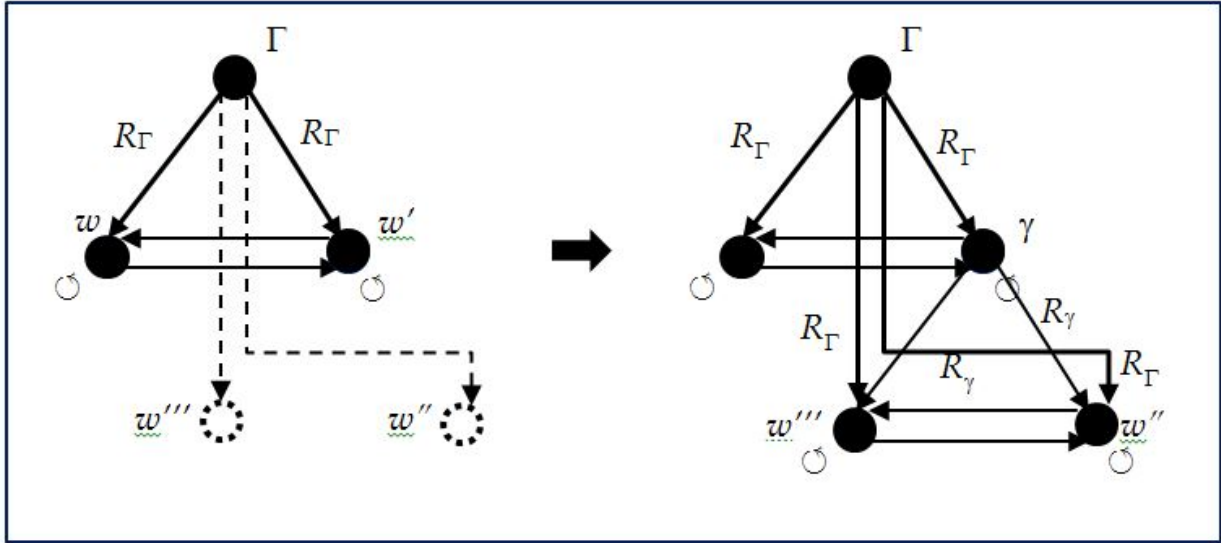
diversi ed irriducibili sensi specifici di co-appartenenza / ammissibilità ($\exists$)

all'unico genere-corpo, tutti causalmente fondati.

- ◆ In soldoni, solo **logicamente** (astrattamente) “delfini”, “cavalli”, “rinoceronti”, “elefanti” e “uomini” **sono tutti mammiferi allo stesso modo, realmente** (ontologicamente) lo sono secondo **diverse modalità causali**. Infatti, i loro DNA sono diversi e solo con alcune sequenze comuni.
- ◆ Tutto questo, finalmente, giustifica formalmente l'asserto tipico dell'ontologia aristotelico-tomista che, sebbene il predicato “**essere-ente**” è il predicato più universale di tutti, perché qualsiasi cosa è ente, pur tuttavia l'essere non è un genere **il genere generalissimo o la categoria di tutte le categorie**, propria di tutte le metafisiche razionaliste, quella hegeliana in primo luogo, perché “essere ente” si dice in molti modi ognuno designato dal nome che si associa alla destra della copula è ($\in$) di un enunciato predicativo corrispondente al nodo di un corrispondente albero di derivazioni causali ($\exists$) da un'unica causa – nella

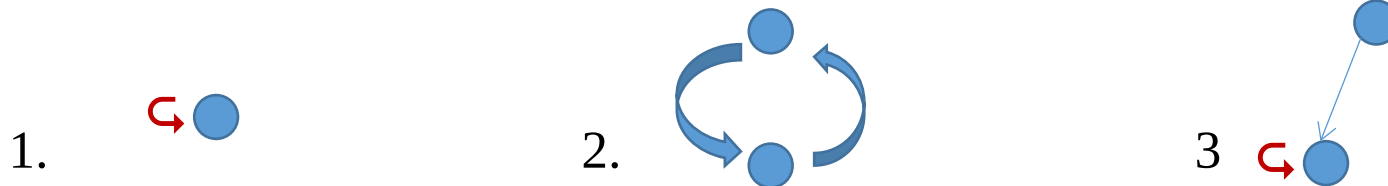
terminologia NWFS: corrispondente all'unica decorazione grafo APG da un'unica radice.

- ♦ Il principale risultato dell'AFA di Aczel è dunque che ogni insieme corrisponde a **un grafo orientato $(G, \rightarrow)$** dove i bordi rappresentano le **relazioni di inclusione**, i nodi altrettanti **(sotto-)insiemi** (cioè ogni nodo è adornato con un unico insieme), e la **radice** è il nodo con cui **ogni altro nodo nel grafo ha un percorso diretto di derivazione**, proprio come i mondi di un frame di Kripke **KD45** **dall'unico mondo Γ che accede causalmente a tutti gli altri, ma è da questi inaccessibile** come nei seguenti grafi APG della semantica modale dell'ontologia formale RN (cfr. Parte IV).



♦ Infatti, poiché AFA consente **le auto-inclusioni**, i seguenti grafi sono ammessi:

1. Il grafo orientato con un solo nodo e un bordo dal nodo a se stesso corrisponde all'insieme della forma: $x = \{x\}$.
2. Un grafo orientato a ciclo di lunghezza 2 corrisponde a un insieme della forma $x = \{\{x\}\}$.
3. Un grafo orientato di lunghezza 2 con un solo ciclo, corrisponde all'insieme della forma $z = \{y, \{x\}\}$.



◆ Questi 3 grafi hanno una grande importanza nell'ontologia RN. Come formalizzazione dell'ontologia tommasiana perché rappresentano, nella formalizzazione della metafisica dell'essere-come-atto di Tommaso: 1) il concetto di **sostanza individuale** (prima) come capace di *reditio completa ad semetipsum*, cioè di sussistenza o “inseità e perseità (unicità)” ; 2) il concetto di **sostanza singola spirituale** come capace di doppia *reditio*, una ontologica l'altra logica, ovvero capace di sussistere perché capace di auto-conoscersi; 3) la **partecipazione diretta di ogni individuo all'essere per esistere**, dove la sorgente inaccessibile dell'essere che a tutti accede è l'Essere Sussistente. → i bordi di tutti gli APG di RN sono **inclusioni causali** di discendenti, non tutti confrontabili per ordinamento quantitativo ($\leq$) perché derivati da diversi percorsi di inclusione causale, da unico ascendente...

8.3.1.4. Equivalenza per bisimilarità/bisimulazione

◆ Un'altra fondamentale nozione che è possibile dimostrare in una teoria degli insiemi non-benfondati è la nozione di **equivalenza per**

bisimulazione/bisimilarità, ovvero di **equivalenza non-estensionale** fra insiemi NWF dove ogni grafo ha un'unica decorazione, ma non ogni insieme, una nozione fondamentale in logica modale.

◆ **Bisimulazione:** Sia $(G, \rightarrow)$ un grafo orientato. Una relazione R su G è una **bisimulazione** se le seguenti relazioni sono soddisfatte: ogni volta che xRy , dove x, y sono nodi,

1. Se $x \rightarrow x''$, allora vi è un $y \rightarrow y''$ tale che $x'' R y''$.

2. Se $y \rightarrow y''$, allora vi è un $x \rightarrow x''$ tale che $y'' R x''$.

◆ Naturalmente una tale insieme di relazioni può essere estesa dal grafo G ad un grafo H , etc.

◆ Quindi, quando una bisimulazione vale **per tutte le relazioni e i nodi** fra due (o più) grafi, essi sono in relazione di bisimilarità, cioè sono **equivalenti per bisimilarità**.

◆ Direttamente derivata dalla nozione di equivalenza per bisimilarità è quella di **equivalenza osservazionale** nel caso cioè di equivalenza fra nodi di un grafo in cui solo alcune caratteristiche dei nodi sono osservabili.

◆ Tale nozione ha un'immediata applicazione:

1. In **teoria degli automi**: due automi sono equivalenti se lo sono i loro comportamenti osservabili (p.es., il programma *Word* su piattaforma PC o Apple).
2. In **fisica quantistica**: dove l'equivalenza fra sistemi riguarda solo gli osservabili del sistema (operatori dei relativi spazi di Hilbert), essendo non osservabili i loro stati (per il principio di indeterminazione)

8.3.1.5. Induzione/coinduzione e logiche modali coalgebriche

- ◆ Naturalmente, per fondare una semantica di una logica booleana in cui giustificare quanto anticipato al punto precedente, occorre poter definire spazi di Stone su insiemi NWFS, e su questi spazi **coalgebre funtorialmente duali ad altrettante algebre di Boole così da soddisfare il teorema di rappresentazione di Stone (cfr. §7.4.2).**
- ◆ Questo risultato è stato ottenuto praticamente nello stesso anno in cui Aczel pubblicava il suo lavoro sugli NWFS (1988), da S. Abramsky per lunghi anni Direttore del Lab di Computer Science dell'Università di Oxford, anche se il lavoro – per quanto largamente diffuso in copia presso i cultori di TCS – è stato pubblicato solo nel 2005 (Abramsky, 2005), dopo che altri lo avevano usato per dimostrare la natura coalgebrica delle logiche modali su algebre di Boole, a

cominciare da L:S: Moss (Moss, 1999a; Moss, 1999b; Kupke, Kurz, & Venema, 2004).

- ◆ E' fondamentale qui ricordare quanto già sappiamo e cioè che la categoria delle algebre di Boole **BAlg** e quella degli spazi di Stone **Stone** sono duali, nel senso che data una funzione monotona da un'algebra di Boole A ad un'algebra di Boole B ad essa corrisponde una funzione continua nella direzione opposta da uno spazio di Stone $S(B)$ ad uno spazio di Stone $S(A)$.
- ◆ Su questa base Abramsky ha dimostrato nel 1988 l'**equivalenza duale**, per l'applicazione controvariante del cosiddetto **funtore di Vietoris** $\mathcal{V}$, delle categorie delle coalgebre definite sugli spazi di Stone **SCoalg** e la categoria **BAlg**. Dove lo **spazio di Vietoris** è uno spazio vettoriale con la medesima topologia di uno spazio di Stone, così che il funtore di Vietoris è sostanzialmente una mappa vettoriale da una struttura a un'altra, che costituisce la cosiddetta “costruzione di Vietoris” (Abramsky, 2005).
- ◆ In questo modo si può affermare che ogni coalgebra di Stone è in grado di **indurre** la sua propria struttura sulla corrispondente algebra di Boole così da giustificare l'**equivalenza duale** fra queste due strutture per l'applicazione

controvariante di un medesimo funtore $\mathcal{V}$: $\mathbf{SCoalg}\mathcal{V} \rightleftharpoons \mathbf{BAlg}\mathcal{V}^{op}$. Ovvero:

$$\mathbf{SCoalg} \xrightarrow[\mathcal{V}/\mathcal{V}^{op}]{\rightleftharpoons} \mathbf{BAlg}$$

- ◆ Apparentemente basterebbe questa nozione per capire come mai possiamo rappresentare in una coalgebra una logica modale, essendo la negazione dell'assioma di estensionalità uno dei caratteri fondamentali delle logiche modali e intensionali.
- ◆ Ma non è così, per poter giustificare la rappresentazione coalgebrica delle logiche modali e intensionali dobbiamo prima introdurre un'altra dualità fondamentale fra algebre e coalgebre definite su insiemi non-benfondati, quella fra **definizione induttiva e coinduttiva di insiemi** e quindi quella fra **induzione e coinduzione come metodi di prova**.

8.3.1.6. Coalgebra universale come teoria generale dei sistemi dinamici

- ◆ Comunque, il passo fondamentale, per poter applicare la nozione di Coalgebra Universale così delineata ai modelli coalgebrici della QFT in fisica quantistica e all'ontologia formale di RN è legata alla fondamentale dimostrazione di J. Rutten della Coalgebra Universale come **teoria generale dei sistemi dinamici** – automi

inclusi – interpretati come altrettanti **sistemi a transizione di stato** (*state transition system*, STS)⁷.

- ◆ Più esattamente **sistemi labellati a transizione di stato** (*labelled transition system*, LTS) – dove la *label* (etichetta) consiste nella **funzione (induttiva/coinduttiva)** che determina la transizione da uno stato all'altro del sistema (in QFT da una fase all'altra del sistema, o in cosmologia, da una coerenza di fase all'altra del vuoto quantistico).
- ◆ Per capire questo ultimo passaggio, basta riflettere su un semplice dato. Siccome ci troviamo **in una logica del primo ordine** tutti gli insiemi di cui stiamo qui parlando sono **computabili** (cfr. “la matematica che serve” di De Giorgi). Quindi gli insiemi degli APG di Aczel possono naturalmente essere interpretati come **output** dei relativi processi (induttivi/coinduttivi) che li generano.
- ◆ Il passaggio ai sistemi dinamici di fisica quantistica e alla teoria generale degli automi in TCS è legato essenzialmente al fatto che è possibile estendere la nozione di equivalenza per bisimulazione a quella di **equivalenza osservazionale (in fisica quantistica) e/o equivalenza comportamentale (in TCS)**. Infatti, sia in fisica quantistica sia negli automi non-deterministici a stati infiniti della TCS

noi possiamo trattare solo degli **osservabili della dinamica**, senza possibilità alcuna di “guardare dentro” la scatola nera dello stato dinamico considerato.

- ◆ Quindi per capire intuitivamente, per fare della Coalgebra Universale una teoria generale dei sistemi dinamici è sufficiente interpretare **i bordi (inclusioni) degli insiemi di Aczel** come altrettante **transizioni di stato labellate in TCS** e/o come **operatori definiti su uno spazio di Hilbert** – che nella QFT termica include anche gli stati del bagno termico – che in fisica quantistica (in generale, anche in QM) sono gli unici “osservabili” del sistema.

8.3.2. Bicondizionale ontologico e dualità in TC

8.3.2.1. Definizione formale della dualità induzione/coinduzione

- ◆ Partiamo di nuovo dalla fondamentale nozione di omomorfismo non necessariamente isomorfo che la coalgebra definita su insiemi di Aczel consente (Cfr. **Figura 7**).
- ◆ A mo’ di esempio, avevamo visto come già in **Set** è possibile avere **biiezioni composte** da iniezioni/suriezioni che non suppongono l’equivalenza degli insiemi coinvolti (Cfr. **Schema 1**). Per rendere corretta l’estensione di questo principio

agli omomorfismi composti da un monomorfismo e un epimorfismo in una dualità funtoriale algebra/coalgebra, bisogna solo ricordare che nel caso coalgebrico l'epimorfismo in questione **non suppone relazioni propriamente suriettive** dei soggiacenti morfismi, se non altro perché l'inversione delle frecce nei morfismi, significa invertire il verso della relazione dominio-codominio su cui la suriezione si definisce.

- ◆ Intuitivamente, i morfismi non sono da molti (dominio) a uno (codominio), come in algebra, **ma da uno (dominio) a molti (codominio)**. Il che significa **la non-transitività delle inclusioni** fra gli insiemi coinvolti e dunque la possibilità di giustificare “inclusioni ad albero”, di nuovo una condizione soddisfacibile solo in insiemi non-benfondati.
- ◆ Ugualmente, l'altra condizione da soddisfare per un'adeguata teoria del bicondizionale ontologico è di giustificare un significato **di processo** (non si può parlare infatti di funzione perché non abbiamo propriamente surietività) al connettivo causale ($\rightarrow_C$) dell'inclusione causale (cfr. sopra §4.8.3), ovvero all'interpretazione ontica della coinduzione. In termini ontologici le entità referenti di proposizioni predicative poste in relazione di bicondizionalità

ontologica sono **generi naturali** di enti fisici, viventi e non-viventi, **causalmente generati/generanti**. La “causa” è dunque **un operatore** che generando i suoi effetti li include causalmente.

- ◆ Per giustificare questa nozione di un’interpretazione, non solo delle classiche relazioni di intersezione e unione, ma anche della relazione di **inclusione** come un **operatore** su insiemi, che “raccolge in unità” gli elementi da includere in strutture di inclusione ad albero, di nuovo ci vengono incontro le coalgebre definite su insiemi non-standard di Aczel, mediante il potente **principio di coinduzione**, come duale del **principio di induzione** nelle algebre di Boole.
- ◆ Se quest’ultimo, come principio di definizione di insiemi è **costruttivo** – topologicamente: gli insiemi aperti parzialmente ordinati che genera sono *upset* $\uparrow\{x\}$ –, il secondo viene, talvolta, denotato come **distruttivo**, con un’espressione infelice e spesso fuorviante, che invece potremo definire **costruttivo inverso o decostruttivo** – topologicamente: gli insiemi aperti parzialmente ordinati che genera sono aperti verso il basso, sono *downset* $\downarrow\{x\}$. Di qui le definizioni duali di induzione e coinduzione come principi per la **definizione di topologie di insiemi parzialmente ordinati** e come **principi di prova** su tali insiemi.

- ◆ In sintesi, si tratta di un'estensione del **teorema di rappresentazione di Stone** discusso in §7.4.2, slide 249ss., da **insiemi standard** a **insiemi non-standard** che arricchisce di molto **la semantica del primo ordine** per insiemi algebrici con immense potenzialità, molte ancora da scoprire, in ogni campo della logica, matematica, algebrica e, ora anche, filosofica.
 - ◆ Il collegamento al teorema di Stone si evince immediatamente dalla formulazione dei due principi di induzione e coinduzione come principi di definizione e di prova (Sangiorgi 2012, 46)⁸:
1. **Definizione induttiva e coinduttiva di insiemi attraverso F .** Per un reticolo completo L i cui punti sono insiemi (come nei reticoli completi ottenuti per costruzione sull'insieme potenza (cfr. sopra **Figura 5** e **Figura 6**) e un endofunzione (endomorfismo) F , gli insiemi:

$$F_{ind} := \bigcap \{x \mid F(x) \leq x\} \quad \uparrow \{x\}$$

$$F_{coind} := \bigcup \{x \mid x \leq F(x)\} \quad \downarrow \{x\}$$

Saranno detti, rispettivamente, **insiemi induttivamente** e **insiemi coinduttivamente definiti da F** . Di qui due regole di prova come corollari della suddetta definizione.

2. Induzione e coinduzione come principi di prova. Noi abbiamo:

se $F(x) \leq x$ allora $F_{ind} \leq x$ (induzione come principio di prova)

se $x \leq F(x)$ allora $x \leq F_{coind}$ (coinduzione come principio di prova)

➤ In altri termini, spiega Sangiorgi, l'induzione come principio di prova è la classica prova **costruttiva**, “in avanti (*forward*), dalla premessa alla conclusione: $\rightarrow$ ”, per induzione (ricorsione) $x_{n+1} = Fx_n$. Il che spiega perché $F_{ind} \leq x$.

➤ Invece la coinduzione come principio di prova è la classica prova **decostruttiva**, “all'indietro (*backward*) dalla conclusione alla premessa: $\leftarrow$ ” per coinduzione (coricorsione) $x_{n-1} = Fx_n$. Il che spiega perché $x \leq F_{coind}$

◆ Il riferimento esplicito di Sangiorgi all'implicazione inversa “ $\leftarrow$ ”, (Sangiorgi 2012), letta come processo di **decostruzione** da una conclusione alla premessa, ci fa vedere come siamo nel giusto quando ci riferiamo alla interpretazione

coalgebrica della logica modale per cercare la logica appropriata al “verso ontico”, dall’effetto alla causa, del bi-condizionale ontologico.

- ◆ La coinduzione come procedura di prova, se nella **logica** computazionale della TCS cui Sangiorgi si riferisce, è una procedura decostruttiva dalla conclusione alla premessa che la implica, la prova coinduttiva interpretata onticamente sulla **relazione causale**, è la procedura di prova tipica della metafisica naturalista della *resolutio* dell’effetto nella causa che lo **include**.
- ◆ Infine, un’ultima fondamentale notazione sul confronto col teorema di Stone. Ciò che differenzia la dualità algebra-coalgebra, dalla **dualità ultrafiltri-ideali massimali** del teorema di Stone, non è solo che la prima è definita su insiemi non-standard e la seconda su insiemi standard, ma soprattutto che in quest’ultima gli insiemi sono **prodotti di processi** induttivi/coinduttivi di definizione.
- ◆ In altri termini, la semantica coalgebrica è una semantica in cui la soddisfacibilità delle proposizioni del calcolo logico si decide in termini di **stati della macchina accessibili** dal sistema fisico in cui sono realizzati, implementati.
- ◆ Ciò spiega perché J.M. Rutten abbia definito e dimostrato essere la **Coalgebra Universale** la teoria generale dei sistemi dinamici interpretati come **sistemi di**

transizione di stato (STS)⁹. Il che di nuovo conferma che la logica coalgebrica è la logica appropriata alla **semantica naturalista** propria di RN, come di qualsiasi **ontologica naturalistica**.

- ◆ A questo punto, avendo definito l'induzione/coinduzione come **procedura duale di prova**, abbiamo tutti gli ingredienti formali per **giustificare formalmente, cioè provare**, la relazione del bicondizionale ontologico, come **organon semantico** fondamentale di **dimostrazione** in un'ontologia e in una metafisica **naturaliste**, e non solo **logiciste o concettualiste** com'è stato in tutta la modernità.
- ◆ Se vogliamo, abbiamo risposto positivamente alla sfida di Kant proposta nei suoi *Prolegomeni ad ogni metafisica che in futuro vorrà ripresentarsi come scienza*.
- ◆ Oppure se vogliamo dirlo nei termini più modesti, ma più formalmente precisi di un Cocchiarella, **il realismo naturale ha un suo calcolo**, grazie a cui può fare a meno della tutela **concettualista** dell'assioma di comprensione fregeano (cfr. sopra, §4.3.2).

8.3.2.2. Giustificazione formale del bicondizionale ontologico

- ◆ Per i nostri scopi, la **conservazione della verità per inversione di frecce e morfismi** che la dualità in TC giustifica, in particolare la dualità algebro-coalgebra definita su insiemi di Aczel, fornisce certamente l'appropriato ambiente formale in cui giustificare la teoria della dualità fra **necessitazione** (*entailment*) **ontica** e **logica**, ovvero la teoria del bicondizionale ontologico come delineata alla fine del cap.4.

- ◆ In simboli:

$$(\alpha \rightleftharpoons \beta) \Leftrightarrow \llbracket (\alpha \rightarrow \beta) \xleftarrow{\rightleftharpoons} (\alpha \leftarrow \beta) \rrbracket \Leftrightarrow 1,$$

- ◆ Dove $(\rightleftharpoons)$ è il **simbolo del bicondizionale ontologico** fra proposizioni del primo ordine, α, β denotanti, in quanto connesse sotto forma di implicazione logica, la causa e l'effetto di un processo naturale (fisico/metafisico); $\llbracket \dots \rrbracket$ è la **condizione necessaria e sufficiente di soddisfacibilità** del bicondizionale, rappresentando $(\alpha \rightarrow \beta)$ il verso **induttivo** logico-algebrico; $(\alpha \leftarrow \beta)$ il verso **coinduttivo** ontico-coalgebrico e $\xleftarrow{\rightleftharpoons}$ il simbolo **dell'invarianza funtoriale della verità**

(omomorfismo non isomorfo) per l'operazione **di inversione delle frecce e dei morfismi** fra componente logica e ontica (fisica/metafisica) del bicondizionale.

- ◆ Similmente, quando passiamo alla **semantica modale**, in quanto “naturalmente” definibile su strutture coalgebriche, l'invarianza funtoriale della verità può essere usata, mediante la nozione di **p-morfismo**, per giustificare **l'equivalenza non-estensionale** fra modelli (mondi possibili) di Kripke – quella che in Logica II avevamo definito “equivalenza secondaria” generata mediante la relazione euclidea e che caratterizza l'assioma **D** del sistema modale **KD45** (Cfr. Logica II, §14.3.1.7, slide 288ss.; e §14.3.2.1 slide 308ss. sull'interpretazione ontica di **KD45**).

$$\underbrace{\text{cavallo} \in \text{mammifero}}_{\text{Verità Logica}} \xleftrightarrow{\text{p-morfismo}} \underbrace{\text{cavallo} \ni \text{mammifero}}_{\text{Verità Ontica}}$$

- ◆ Il “p-morfismo” è definito anche **morfismo limitato**, proprio perché si limita a modelli di un medesimo livello, degli infiniti possibili ottenibili “annidando uno dentro l'altro” sistemi **KD45** – cfr., insiemisticamente, lo “svolgimento” (*unfolding*) di APG di insiemi non-benfondati illustrato in §8.3.1 –, ottenendo così un numero indefinito di inclusioni di modelli di Kripke che la sua semantica

relazionale consente. Un principio questo che useremo sistematicamente in RN per giustificare le indefinite possibili inclusioni genere-specie di enti.

◆ **Il p-morfismo fra modelli di Kripke** in semantica modale così si definisce (Goranko & Otto 2007, p.259):

- Siano $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ e $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dei modelli di Kripke, ovvero due strutture (*frame*) definite da due insiemi di mondi possibili $\langle W, W' \rangle$, una relazione di accessibilità fra mondi per ciascuna struttura $\langle R, R' \rangle$ e una funzione di valutazione $\langle V, V' \rangle$ che fa di ciascun mondo un modello, ovvero un dominio di oggetti (stati) su cui interpretarli. Una funzione $\rho : W \rightarrow W'$ è un morfismo limitato da $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{M}'$ se il suo grafo è una **bisimulazione** (omomorfa non isomorfa) fra $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$. Denoteremo il p-morfismo $\rho : \mathfrak{M} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{M}'$, dove l'invarianza della verità così indicata fra i due (se è vero/falso l'uno è vero/falso l'altro) non presuppone qui alcuna inversione della composizione dei morfismi, come fra categorie, trattandosi qui di un solo morfismo (per questo definito anche “morfismo limitato”, *N.d.r.*).

- ◆ È evidente che il soggiacente **omomorfismo localmente isomorfo (=invertibile)** che giustifica la verità del bicondizionale ontologico come del connesso p-morfismo non può essere un isomorfismo, e dallo schema di **Figura 7** abbiamo visto che questa condizione può essere soddisfatta solo supponendo strutture algebriche **infinite**. È stato dimostrato che questa condizione di una biiezione non isomorfa fra un'algebra (monomorfismo) e la sua duale, la coalgebra (epimorfismo) può essere garantita definendo la coalgebra sugli insiemi non-benfondati che ammettono inclusioni infinite (Aczel 1988), grazie alle quali è possibile ottenere anche **una dimostrazione di completezza** della semantica relazionale di Kripke in logica modale e delle sue successioni illimitate di inclusioni di modelli (Cfr. (Venema 2007)).

9. Dualità coalgebra-algebra in fisica fondamentale

9.1. Dalla QM alla QFT termica in fisica fondamentale

- ◆ Il formalismo matematico della fisica quantistica (Von Neumann, 1955) è basato sulla fondamentale scoperta di D. Hilbert intorno agli anni '20 del secolo scorso secondo la quale le cosiddette **variabili canoniche** della meccanica classica, *posizione q e quantità di moto (energia) p* , che di per sé **non commutano** fra di loro, causa il principio d'indeterminazione di Heisenberg, **commutano ognuno con la trasformata di Fourier dell'altra**.
- ◆ Di qui la definizione della nozione di **relazione di commutazione canonica in QM**: $[p, q] = i\hbar$, dove i è un numero immaginario e $\hbar$ è la costante di Planck, laddove in meccanica classica la stessa relazione è $[p, q] = 1$. La commutatività consente di definire un particolare spazio degli stati (o delle fasi) – che ha

appunto per dimensioni p e q a patto però che le due commutino fra di loro – anche per i sistemi quantistici: il cosiddetto **spazio di Hilbert**.

- ◆ Ora, i due ultimi Premi Nobel per la fisica del 2015 e del 2016 hanno sancito al massimo livello della comunità scientifica il **cambio di paradigma in atto in fisica fondamentale** verso la QFT, data **l'insufficienza del Modello Standard** come spiegazione ultima dei costituenti della materia (2015) e **l'emergenza di una fisica delle fasi della materia** e quindi di un'**interpretazione topologica** della fisica quantistica e della computazione quantistica (2016).
- ◆ Di qui l'importanza della **QFT termica** che consente una **modellizzazione coalgebrica** dei sistemi quantistici come **sistemi dissipativi** perché sistemi aperti alle fluttuazioni del vuoto quantistico (QV), che non è possibile in linea di principio usando le nozioni di **meccanica statistica** nell'interpretazione della termodinamica quantistica tipica della QM.
- ◆ In questa interpretazione infatti è possibile modellizzare solo sistemi aperti **stabili in condizioni vicine all'equilibrio** usando la condizione asintotica tipica della meccanica statistica (Hollands & Longo, 2016) (see sl. 232), e non sistemi aperti **stabili fuori dall'equilibrio** quali sono i sistemi quantistici dissipativi.

- ◆ Per tali sistemi, caratterizzati dal fatto che il sistema passa continuamente **attraverso diverse fasi**, occorre necessariamente fare riferimento alla **modellizzazione coalgebrica di tali sistemi** tipica della QFT termica (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011; Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017), interpretata cioè secondo i termini della **dinamica dei campi termici**, in quanto distinta dalla meccanica statistica che necessariamente studia il sistema in una sola fase, introdotta negli anni '80-'90 dello scorso secolo dal fisico giapponese Hiroomi Umezawa (Umezawa, 1993; 1995).
- ◆ La nozione di VQ è, infatti, l'unica possibile spiegazione a livello fondamentale, microscopico, del **Terzo Principio della Termodinamica**, in genere formulato come segue: “l'entropia di un sistema si avvicina ad un valore costante nella misura in cui la temperatura si approssima allo zero”.
- ◆ Di fatto fu il chimico Walter Nernst, per questo insignito del Premio Nobel nel 1921, a scoprire che per una data mole di materia – effettivamente un insieme di un numero di Avogadro di molecole o di atomi – per temperature assolute vicine allo 0 assoluto in gradi Kelvin (-273°C), T_0 , se la connessa variazione di entropia ΔS non raggiungesse un valore costante, acquisirebbe un valore infinito (si

dividerebbe per 0). Ciò significa, in pratica che la temperatura di qualsiasi sistema fisico **non raggiungerà mai lo zero assoluto**.

- ◆ Ciò significa però che **vi è una non-corrispondenza fra la variazione del contenuto di energia di un corpo e il supplemento di energia dall'esterno**. Da dove prenderà infatti il sistema l'energia perché le sue particelle possano continuare a oscillare indefinitamente e quindi il sistema avere una temperatura $T > 0^\circ\text{K}$?
- ◆ Possiamo evitare questo paradosso se si suppone che questa misteriosa sorgente “interna” di energia sia il vuoto – di qui il concetto di “energia del vuoto”. Esiste cioè un'inevitabile fluttuazione dei costituenti elementari della materia, così che lo 0°K (-273°C) assoluto non possa essere mai raggiunto. **La conclusione è che non possiamo più concepire alcun corpo fisico come isolato nel vuoto meccanico** secondo il paradigma meccanicista della meccanica classica (newtoniana) e statistica (mediante la condizione asintotica).
- ◆ *“Il VQ diviene un ponte che connette fra di loro tutti gli oggetti. Non può esistere alcun corpo isolato, così che l'attore fondamentale in fisica non è più la particella, ma il campo, cioè le distribuzioni nello spazio di particelle che*

variano nel tempo. Le particelle divengono “i quanti” di questo campo di materia, allo stesso modo che i fotoni sono i quanti del campo elettromagnetico” (Del Giudice, Pulselli, & Tiezzi, 2009).

- ◆ In altri termini non esiste più come nel quadro del Modello Standard la distinzione meccanicista fra **particelle** (fermioni: quark, elettroni, neutroni) e **quanti di campi delle forze d'interazione** (bosoni di gauge delle tre forze fondamentali: elettromagnetica, forte e debole).

mass →	$\approx 2.3 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 1.275 \text{ GeV}/c^2$	$\approx 173.07 \text{ GeV}/c^2$	0	$\approx 126 \text{ GeV}/c^2$
charge →	$2/3$	$2/3$	$2/3$	0	0
spin →	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H Higgs boson
	$\approx 4.8 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 95 \text{ MeV}/c^2$	$\approx 4.18 \text{ GeV}/c^2$	0	
	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	d down	s strange	b bottom	γ photon	
	$0.511 \text{ MeV}/c^2$	$105.7 \text{ MeV}/c^2$	$1.777 \text{ GeV}/c^2$	$91.2 \text{ GeV}/c^2$	
	-1	-1	-1	0	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson	
	$< 2.2 \text{ eV}/c^2$	$< 0.17 \text{ MeV}/c^2$	$< 15.5 \text{ MeV}/c^2$	$80.4 \text{ GeV}/c^2$	
	0	0	0	± 1	
	$1/2$	$1/2$	$1/2$	1	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	W W boson	

QUARKS

LEPTONS

GAUGE BOSONS

- ◆ In QFT esistono solo **campi di forze materiale con i loro quanti (fermioni)** e **campi di forze d'interazione con i loro quanti (bosoni di gauge)**.

- ◆ Il cuore teoretico fra QFT e QM può essenzialmente ridursi alla critica del pregiudizio, ancora imperante dell'interpretazione della QFT come una **seconda quantizzazione** rispetto alla QM. Ciò fa sì che si continui a parlare di QM anche quando, di per sé, si fa riferimento a nozioni proprie della QFT.
- ◆ Questa lettura della QFT, però, si scontra con l'evidenza che in QFT **non vale** il classico teorema di Stone-Von Neumann (Von Neumann, 1955), dimostrato nel 1931 e di cinque anni precedente al teorema di Stone di rappresentazione per le algebre di Boole (§7.4.2), che è invece alla base della QM. Il legame teoretico fra i due teoremi è che le topologie comuni ai due teoremi **sono le stesse** come verrà dimostrato più tardi, così da dar inizio all'**interpretazione topologiche** sia della fisica quantistica che della computazione quantistica, come abbiamo visto.
- ◆ Il teorema di Stone-Von Neumann della QM afferma che, per sistemi con **un numero finito di gradi di libertà** (= le dimensioni dello spazio di rappresentazione della sua modellizzazione) il che è sempre vero per sistemi della QM, le rappresentazioni delle **relazioni di commutazione canoniche** sono tutte *unitariamente equivalenti l'una rispetto all'altra*, così da giustificare l'uso

esclusivo dell'informazione di Shannon nella QM – le differenze fra elementi equivalenti possono essere solo sintattiche, mai semantiche.

- ◆ Viceversa (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011), nei sistemi della **QFT i gradi di libertà non possono essere finiti** (Haag, 1955), “quindi esistono infinite rappresentazioni non-equivalenti delle relazioni canoniche di commutazione (bosoni) e di anti-commutazione (fermioni)”. Esse corrispondono ad altrettante **possibili infinite rotture spontanee di simmetria (RSS) del QV**, come il teorema di Goldstone ha dimostrato (Goldstone, 1961).
- ◆ Infatti, attraverso il principio della RSS nello stato fondamentale del QV esistono **infinite (non-numerabili) condizioni di VQ**, tutte compatibili con lo stato fondamentale stesso. Inoltre, questo non vale solo nel *dominio relativistico* (microscopico), ma anche si applica al dominio non-relativistico dei sistemi a molti corpi della materia condensata, quindi nel *dominio mesoscopico e macroscopico*, fino alle scale del dominio *megaloscopico* dei fenomeni e dei sistemi cosmologici.
- ◆ Infatti, a partire dalla scoperta, negli anni '60 del secolo scorso, delle correlazioni a lungo raggio, generate dinamicamente e mediate dai cosiddetti *bosoni di*

Nambu-Goldstone (NG), e quindi del loro ruolo nelle cosiddette *teorie di gauge* grazie al “campo di Higgs” (Goldstone, Salam, & Weinberg, 1962), la scoperta di questi **modi collettivi, o domini di coerenza di fase** dei campi di forza e dei loro quanti (particelle), ha cambiato profondamente il quadro di riferimento della fisica fondamentale.

- ◆ Tutte le teorie di **grande unificazione**, da quella della *forza elettro-debole* (Goldstone, Salam, & Weinberg, 1962), a quella recentissima che include anche la *forza forte*, grazie alla conferma sperimentale del “bosone di Higgs” – scoperte costellate dalla concessione di un numero impressionante di Premi Nobel della fisica negli ultimi trenta anni –, hanno nella QFT e nei “condensati” (= densità definita) di bosoni NG, che caratterizzano univocamente un dominio di coerenza di fase del campo, la loro chiave di volta.
- ◆ Siccome i bosoni NG non sono bosoni di gauge, cioè quanti di un’ulteriore forza fondamentale, quanti di energia, ma quanti **dei modi coerenti di essere in fase** di tutti i campi di forza materiali e d’interazione della QFT – infatti essi **svaniscono senza residui**, senza violare il I Principio, quando si rompe il dominio di coerenza di fase che essi ordinano – essi possono essere definiti “quanti di forma”

e non di “materia” così da confermare la **nuova visione duale della natura** legata alla QFT.

- ◆ La più evidente differenza fra QM e QFT è così l’interpretazione fisica profondamente differente del *principio d’indeterminazione di Heisenberg* e della correlata dualità particella-onda che caratterizza la fisica quantistica. Mentre, dunque, il principio di indeterminazione in QM si enuncia come:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- ◆ Dove x , nell’esempio classico in QM dell’elettrone nell’atomo, è la posizione e p è la quantità di moto della particella, e $\hbar$ è la costante di Planck normalizzata sulla circonferenza. Nella QFT, invece, la stessa relazione si legge come:

$$\Delta n \Delta \varphi \geq \hbar$$

- ◆ Dove n è il numero di quanti del campo di forza e φ è la *fase* del campo. Se ($\Delta n = 0$), φ è indefinita, così che ha senso non considerare la forma d’onda in favore del comportamento individuale tipo-particella. Al contrario, se ($\Delta \varphi = 0$), n è indefinito perché un numero estremamente alto di particelle sta oscillando

insieme con una fase ben definita, cioè all'interno di un dato dominio di *coerenza di fase*.

- ◆ In questo caso, sarebbe un non-senso descrivere il fenomeno nei termini di comportamento di particelle individuali, poiché prevalgono i modi collettivi del campo di forze.
- ◆ Insomma, nella QM l'incertezza, e quindi la dualità particella-onda è **fra due rappresentazioni**, tipo-particella e tipo-onda, perché viene concepita come dipendente da insuperabili limitazioni del processo di misura, p.es., nel caso classico dell'elettrone nell'atomo, fra posizione q e quantità di moto p .
- ◆ In ogni caso, la funzione d'onda di De Broglie-Schrödinger in QM non è espressione di qualche entità dinamica come un campo di forze, ma semplicemente espressione di due modi, necessariamente differenti e reciprocamente irriducibili, di **rappresentare** (misurare) un fenomeno quantistico.
- ◆ Quindi, un approccio ontologico di tipo concettualista, come quello del **RCN** di Cocchiarella, è in linea di principio perfettamente adeguato – come Cocchiarella stesso afferma – a fungere da ontologia formale della QM, proprio come

un'ontologia concettualista di tipo kantiano lo era per la meccanica classica newtoniana.

- ◆ Al contrario, in QFT **la dualità è fra due entità dinamiche**: il campo di forze fondamentale e le particelle quantistiche, con o senza massa, associate a quel campo di forze che sono semplicemente i quanti di quel campo.
- ◆ In tal modo, **l'entanglement** quantistico non implica alcuna strana o misteriosa relazione fra particelle, come nelle false divulgazioni della QM.
- ◆ Esso è semplicemente espressione del **carattere unitario di uno stato coerente (coerenza di fase) di un campo di forze**.
- ◆ In altri termini, per usare un'espressione molto forte del fisico italiano Marcello Cini, la funzione d'onda di Schrödinger non è altro che “un rozzo **ricoprimento statistico** (*statistical blanket*) di una struttura molto più fine della natura dinamica della realtà”.
- ◆ Il fatto che noi viviamo in un **mondo dinamicamente continuo** spiega intuitivamente perché in QFT si usa un formalismo **topologico** per rappresentare la dinamica dei sistemi quantistici.

- ♦ Gli **spazi topologici** sono spazi in cui sono ammesse solo trasformazioni continue (es.: allungamenti, curvature, torsioni), ma **nessuna rottura**. Sono dunque ammessi solo **modifiche gradual**i anche se **immediatamente coinvolgono** tutti gli oggetti definiti su di esso.

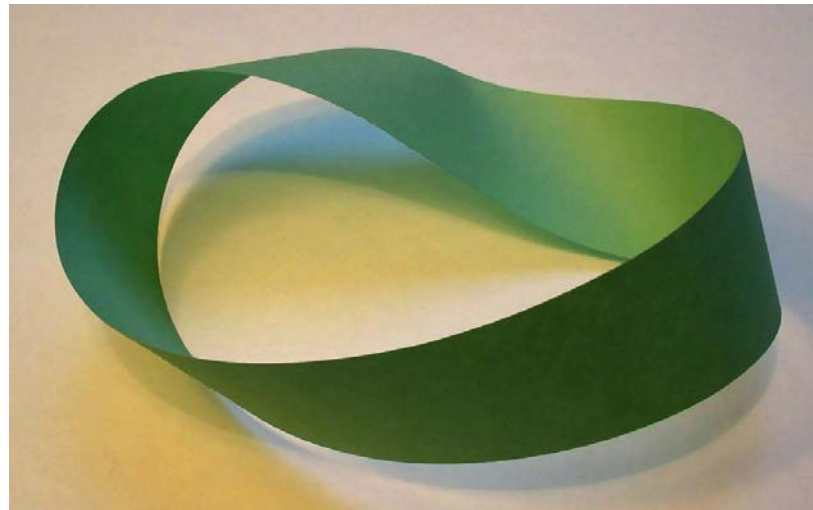


Figura 2. Il famoso “nastro di Möbius” è un tipico esempio di struttura topologica. Non per nulla il cosiddetto “gruppo di Möbius” ha un ruolo fondamentale nei calcoli algebrici della QFT e della QM.

- ◆ Pensiamo intuitivamente, per esempio, alla **curvatura di uno spazio piatto**: essa cambia simultaneamente tutti gli angoli e quindi le proprietà delle figure geometriche definite su di esso, senza bisogno di inviare alcun segnale fra di loro. E' questa la modellizzazione matematica di ciò che abbiamo definito il **comportamento collettivo o *entanglement***, come costituenti un'unica realtà delle particelle della QFT intese come quanti dei relativi campi di forza nella misura in cui fanno parte di **un unico dominio di coerenza di fase**, ontologicamente, “essere il dominio di un unico predicato” (p.es., “essere ferromagnete”, “essere superconduttore”, o nel caso delle transizioni di fase in cui tutte le reazioni chimiche consistono “essere NaCL (sale da cucina)” e non più “essere sodio (Na)” o “essere cloro (Cl)” individualmente, etc.
- ◆ Si vede immediatamente dunque come la QFT costituisca la base fisica per una **ontologia del realismo naturale aristotelico, anti-meccanicista** ovvero sulla distinzione in fisica fra **moto locale di particelle (*kynesis*)** e **trasformazione** di sostanze (*metabolé*: transizioni di fase di campi quantistici), accidentale, quando una sostanza cambia stato (p.es., solido-liquido-gassoso), o sostanziale quando cambia natura. A ogni *metabolé* corrisponde nell'ontologia aristotelica

l'eduazione, dal sostrato del dinamismo primario della materia, di una nuova forma sostanziale o accidentale. Proprio come in QFT ad ogni dominio di coerenza di fase dei campi quantistici corrisponde una RSS del QV.

9.2. Modellizzazione coalgebrica della QFT termica

- ◆ Per i nostri scopi, ciò che è qui fondamentale sottolineare è il cambio richiesto dalla QFT termica nella **formalizzazione matematica** dei sistemi quantistici, nell'ambito di questa interpretazione topologica dei sistemi quantistici, comune anche alla QM.
- ◆ Generalmente, lo strumento algebrico fondamentale per effettuare i calcoli su un reticolo di **numeri quantici** relativi alle variabili che caratterizzano il sistema, sia in QM che in QFT, sono le cosiddette **algebre di Hopf**.
- ◆ Effettivamente un'algebra di Hopf è una **bialgebra** composta da un **algebra** $H \times H \rightarrow H$ (usata per esempio per calcolare l'energia di una singola particella), e da una **coalgebra** $H \rightarrow H \times H$ (usata per calcolare l'energia totale delle particelle in un singolo stato quantico). Queste due metà della bialgebra sono perfettamente **isomorfe**, e legate da una mappa lineare K . Poiché sia le coppie di **prodotti**

(algebra) che di **co-prodotti** (coalgebra) **commutano fra di loro** è evidente che sono **covarianti**. $\rightarrow$ Le algebre di Hopf sono dunque **autoduali**: se mappo un'algebra di Hopf su se stessa ottengo una nuova algebra di Hopf.

$$\begin{array}{ccccc}
 & H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes \text{id}} & H \otimes H & \\
 \Delta \nearrow & & & & \searrow \nabla \\
 H & \xrightarrow{\varepsilon} & K & \xrightarrow{\eta} & H \\
 \Delta \searrow & & & & \nearrow \nabla \\
 & H \otimes H & \xrightarrow{\text{id} \otimes S} & H \otimes H &
 \end{array}$$

- ◆ Naturalmente nel caso dei sistemi della QFT termica **non ha senso di parlare di commutatività dei co-prodotti**. L'energia totale, in questo caso di sistema aperto agli scambi con l'ambiente (sistema dissipativo) è data dalla somma fra uno stato del sistema e dello stato del suo bagno termico **e i due non possono essere commutati fra di loro**, perché non sono affatto equivalenti. Nel caso dei

coprodotti invece di due particelle in uno stato quantico della QM la commutatività era garantita dalla loro indistinguibilità per il principio d'indeterminazione.

- ◆ Questo significa rompere la simmetria sferica della bialgebra di Hopf, così che si parlerà di **algebre di Hopf q -deformate**, dove q è un parametro termico legato alla cosiddetta **trasformazione di Bogoliubov** che entra in qualsiasi processo di creazione-annihilazione di particelle dal QV.
- ◆ In questo senso una modellizzazione di tipo coalgebrico potrebbe bastare a rappresentare un sistema dissipativo. Tuttavia, poiché **bisogna soddisfare la canonicità**, ovvero **il carattere Hamiltoniano** di un sistema quantistico occorre operare un **raddoppio delle algebre**, ovvero:
 1. **Raddoppiare gli stati dello spazio di Hilbert** perché a ogni stato del sistema **corrisponde specularmente** (ovvero con un'inversione della freccia-energia per soddisfare il bilancio energetico) **uno stato del bagno termico**. E' il cosiddetto principio del **raddoppio dei gradi di libertà del sistema** (*doubling of degrees of freedom (DDF)*).

2. **Raddoppiare ogni coalgebra q -deformata di Hopf** con la sua **dualmente omomorfa algebra q -deformata di Hopf**, per l'applicazione controvariante di un medesimo mapping fra le due strutture, la trasformata di Bogoliubov (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011; Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017). In simboli: $q-HCoalgT \rightleftharpoons q-HAlgT^*$ per ogni singolo sistema

9.3. Conseguenze per i fondamenti della fisica quantistica, della computazione quantistica e per la loro ontologia

- ◆ Innanzitutto il principio della DDF opera un'incredibile semplificazione dei calcoli quantistici. Infatti:
 1. **È la dinamica stessa**, non l'osservatore, che, col raddoppio, **opera la scelta dell'appropriata base ortonormale** dello spazio di Hilbert per rappresentare adeguatamente (veritativamente) il sistema.
 2. **Conseguentemente** nei calcoli su matrice associati, p.es., per la definizione dei valori di determinate proprietà del sistema a temperature finite tutti i valori numerici sono **valori interi**. La determinante della matrice sarà dunque

perfettamente calcolabile essendo una “delta di Krönecker” e non una “delta di Dirac” com’era nella QFT non-termica, con il problema degli infiniti ad essa associati.

3. **D’altra parte** siccome tutte le coalgebre della QFT termica sono caratterizzate da un unico endofuntore, la trasformata di Bogoliubov T , ed ogni colagbra – e il relativo “foglio” del QV, in base al principio della “foliazione del QV” – è **univocamente identificata da un valore definito del parametro di deformazione q** intrinsecamente associato a T , T stesso assume la funzione di “funtore diagonale” perché mappa in associazione a un determinato q ogni coalgebra in un’unica **coalgebra finale** in base al Teorema di Aczel, l’insieme delle coalgebre q -deformate di Hopf della QFT termica costituisce un’unica **categoria come la sua duale**, per l’applicazione controvariante del medesimo endofuntore T . In simboli: $q\text{-HCoalgT} \rightleftharpoons q\text{-HAlgT}^*$.
4. **Finalmente**, poiché la categoria $q\text{-HCoalgT}$ costituisce una coalgebra finale, e soprattutto gli spazi topologici associate a queste strutture sono gli stessi del Teorema di Stone è possibile associare anche a questa categoria di coalgebre la dualità equivalente con la categoria delle algebre di Boole, secondo la

relazione che già conosciamo: $\mathbf{SCoalgT} \rightleftharpoons \mathbf{BAlgT}^*$. In altri termini, i sistemi della QFT termica modellizzati coalgebricamente costituiscono una nuova classe di computer quantistici basati **sull'universalità coalgebrica** (Rutten, 2000). Con il non piccolo vantaggio del valore semantico del loro qbit “semantico”, visto che per il meccanismo del “raddoppio dei gradi di libertà” esso commuta 0/1 solo quando il sistema “è in sintonia” col suo ambiente (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017). Ciò spiega perché anche il nostro cervello e la sua memoria dinamica (*deep learning*) funzionano sui principi della QFT termica, come dimostrato in decine di studi (Cfr. per una sintesi (Freeman & Vitiello, 2008; Capolupo, Freeman, & Vitiello, 2013).

10. Bibliografia di questa parte

- Abramsky, S. (2005). A Cook's Tour of the Finitary Non-Well-Founded Sets (original lecture: 1988). In S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila, L. C. Lamb, & J. Woods (Eds.), *Essays in honor of Dov Gabbay. Vol. I* (pp. 1-18). London: Imperial College Publications.
- Abramsky, S., & Tzevelekos, N. (2011). Introduction to categories and categorical logic. In B. Coecke (Ed.), *New structures for physics. Lecture Notes in Physics, vol. 813* (pp. 3-94). Berlin-New York: Springer.
- Aczel, P. (1988). Non-Wellfounded Sets. *CLSI Lecture Notes, vol.14*.
- Basti, G., Capolupo, A., & Vitiello, G. (2017). Quantum Field Theory and Coalgebraic Logic in Theoretical Computer Science. *Prog. in Bioph. & Mol. Biol. Special Issue: Quantum information models in biology: from molecular biology to cognition, 123*(In Press). Retrieved from preprint on <https://arxiv.org/pdf/1701.00527.pdf>
- Blackburn, P., De Rijke, M., & Venema, Y. (2002). *Modal logic. Cambridge tracts in theoretical computer science*. Cambridge, UK: Cambridge UP.

- Blasone, M., Jizba, P., & Vitiello, G. (2011). *Quantum field theory and its macroscopic manifestations. Boson condensation, ordered patterns and topological defects*. London: Imperial College Press.
- Capolupo, A., Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2013). Dissipation of dark energy by cortex in knowledge retrieval. *Physics of life reviews, This Issue*.
- Cocchiarella, N. B., & Freund, M. A. (2008). *Modal logic. An introduction to its syntax and semantics*. Oxford UK: Oxford UP.
- Del Giudice, E., Pulselli, R., & Tiezzi, E. (2009). Thermodynamics of irreversible processes and quantum field theory: an interplay for understanding of ecosystem dynamics. *Ecological Modelling*, 220, 1874-1879.
- Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2006). Nonlinear brain dynamics as macroscopic manifestation of underlying many-body field dynamics. *Physics of Life Reviews*, 3(2), 93-118.
- Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2008). Dissipation and spontaneous symmetry breaking in brain dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(30), 304042. doi:10.1088/1751-8113/41/30/304042

- Galvan, S. (1991). *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica*. Milano: Franco Angeli.
- Goldstone, J. (1961). Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cimento*, 19, 154–164. doi:10.1007/BF02812722
- Goldstone, J., Salam, A., & Weinberg, S. (1962). Broken Symmetries. *Physical Review*, 127, 965–970. doi:doi:10.1103/PhysRev.127.965
- Haag, R. (1955). On quantum field theories. *Matematisk-fysiske Meddelelser*, 29(12), 1-37.
- Hollands, S., & Longo, R. (2016, September 9). *Non Equilibrium Thermodynamics in Conformal Field Theory*. Retrieved from arXiv:1605.01581v1 [hep-th] 5 May 2016: <http://www.arxiv.org>
- Kupke, C., Kurz, A., & Venema, Y. (2004). Stone coalgebras. *Theoretical computer science*, 327, 109-134.
- Moss, L. S. (1999a). Coalgebraic logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 96, 277-317.
- Moss, L. S. (1999b). Erratum to “Coalgebraic logic”. [Ann. Pure Appl. Logic 96 (1999) 277-317]. *Annals of Pure and Applied Logic*, 99, 241-259.

- Moss, L. S. (2017). *Non-wellfounded set theory*. Retrieved March 10, 2017, from The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.): <https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/nonwellfounded-set-theory/>
- Peirce, C. S. (1886). *One, Two, Three: Kantian Categories*. MS [R] 897. Retrieved May 15, 2016, from Commens Digital Companion to C. S. Peirce. Term: "Firstness": <http://www.commens.org/dictionary/term/firstness>
- Rutten, J. J. (2000). Universal coalgebra: a theory of systems. *Theoretical computer science*, 249(1), 3-80.
- Umezawa, H. (1993). *Advanced field theory: micro, macro and thermal concepts*. New York: American Institute of Physics.
- Umezawa, H. (1995). Development in concepts in quantum field theory in half century. *Math. Japonica*, 41, 109–124.
- Venema, Y. (2007). Algebras and co-algebras. In P. Blackburn, F. J. van Benthem, & F. Wolter (Eds.), *Handbook of modal logic* (pp. 331-426). Amsterdam, North Holland: Elsevier.

Von Neumann, J. (1955). *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Princeton, NJ: Princeton UP.

11. Note

¹ Cfr. L'eccezionale sintesi al riguardo di uno dei più grandi matematici viventi (fra l'altro premio Field nel 1986): M. Atiyah, *Duality in Mathematics and Physics*, lecture notes from the Institut de Matematica de la Universitat de Barcelona (IMUB), 2007. Scaricabile online all'indirizzo:

http://www.fme.upc.edu/ca/arxiu/butlleti-digital/riemann/071218_conferencia_atiyah-d_article.pdf/view

² Cfr. M. H. Stone, «The theory of representation for Boolean algebras,» *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(1936), pp. 37-111.

³ Cfr. A. Kurz & R. Leal, «Modalities in the Stone Age. A Comparison in Coalgebraic Logic», *J. of Theoretical Computer Science*, 430(2012), 88-116.

⁴ Cfr., per esempio, il trattato di SERGIO GALVAN, *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica*, Franco Angeli, Milano, 1991, di cui ci siamo abbondantemente serviti nei nostri corsi; e il più recente: NINO B.

COCCHIARELLA E MAX A. FREUND, *Modal logic. An introduction to its syntax and semantics*, Oxford UP, Oxford UK, 2008, che formalizza la logica modale nei termini della semantica di NGB. Se il primo si muove nell'ottica di un'ontologia **logicista**, il secondo nell'ottica di quella **concettualista**. L'interpretazione coalgebrica completa il quadro nell'ottica di un'ontologia **naturalista** che pone al centro il problema del bi-condizionale ontologico in quanto irriducibile a quello logico, un'ottica che anche Tommaso e Quine avrebbero apprezzato, in quanto ambedue lontanissimi – anche se per motivi diversi – dalle prime due ontologie.

⁵ D. SANGIORGI, “Origins of bisimulation and coinduction”, in D. SANGIORGI & J. RUTTEN, *Advanced topics in bisimulation and coinduction*, Cambridge UP, Cambridge UK, 2012, 1-37.

⁶ Si tratta della voce “Non-wellfounded set theory” curate da L. Moss per la Stanford Encyclopedia of Philosophy, una delle migliori e più aggiornate introduzioni all'argomento: <http://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/>

⁷ Cfr. JAN J. M. RUTTEN, «Universal coalgebra: a theory of systems», *Theoretical computer science*, 249 (2000), 3-80.

⁸ Per queste definizioni, cfr. il recente, ma già classico manuale D. SANGIORGI, *Introduction to bisimulation and coinduction*, Cambridge UP, Cambridge UK, 2012
⁹ (Rutten, 2000)