



GIANFRANCO BASTI

LOGICA III: LOGICA FILOSOFICA E FILOSOFIA FORMALE

**Parte III:
Dualità Algebra-Coalgebra, Logica Modale
e il Bi-condizionale Ontologico**

Roma 2016

SOMMARIO

SOMMARIO	200
5. IL PROBLEMA DEL BI-CONDIZIONALE ONTOLOGICO E LA SUA SOLUZIONE COALGEBRICA	202
5.1. UTILITÀ E LIMITE LOGICO DELLA SOLUZIONE ARISTOTELICO-TOMISTA DEL PROBLEMA.....	202
5.1.1. <i>Appendice I: fondazione ontica della verità logica nell'ontologia RN</i>	209
5.1.2. <i>Appendice II: le conseguenze della soluzione moderna del problema</i>	212
5.2. DUALITÀ IN MATEMATICA, LOGICA E LOGICA MODALE	214
5.2.1. <i>Dualità in matematica e logica</i>	214
5.2.2. <i>Dualità nella logica di Boole e in logica proposizionale</i>	218
5.3. LA LOGICA DI BOOLE NELLA COSIDDETTA "ERA DI STONE"	222
5.3.1. <i>Spazi topologici e insiemi aperti e chiusi</i>	222
5.3.2. <i>Teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole</i>	227
5.4. DUALITÀ ALGEBRA-COALGEBRA NELLA TEORIA DELLE CATEGORIE	235
5.4.1. <i>Dalla teoria degli insiemi alla teoria delle categorie (TC)</i>	235
5.4.2. <i>Alcune nozioni elementari di teoria delle categorie (TC)</i>	243
5.4.3. <i>Dualità algebra-coalgebra in fisica e in logica matematica</i>	247
5.5. LA COALGEBRA UNIVERSALE COME TEORIA GENERALE DEI SISTEMI DINAMICI E LA GIUSTIFICAZIONE DEL BICONDIZIONALE ONTOLOGICO	252
5.5.1. <i>Insiemi non-benfondati e coalgebra universale</i>	252
5.5.1.1. <i>Le origini: infinite inclusioni</i>	252
5.5.1.2. <i>Assioma di anti-fondazione (anti-foundation axiom, AFA)</i>	254
5.5.1.3. <i>Rappresentazione di insiemi mediante grafi</i>	256
5.5.1.4. <i>Equivalenza per bisimilarità/bisimulazione</i>	261
5.5.1.5. <i>Induzione/coinduzione e logiche modali coalgebriche</i>	263
5.5.1.6. <i>Coalgebra universale come teoria generale dei sistemi dinamici</i>	269
5.5.2. <i>Bicondizionale ontologico e dualità in TC</i>	272
5.5.2.1. <i>Definizione formale della dualità induzione/coinduzione</i>	272
5.5.2.2. <i>Giustificazione formale del bicondizionale ontologico</i>	279
5.6. NOTE	290

5. Il problema del bi-condizionale ontologico e la sua soluzione coalgebrica

5.1. Utilità e limite logico della soluzione aristotelico-tomista del problema

- ◆ L'analisi formale della soluzione aristotelico-tomista del problema del bi-condizionale ontologico è **utile**, dal punto di vista semantico per due motivi:
 1. Ha evidenziato le nozioni semantiche di **inclusione causale** $\langle p \supset_c q \rangle$ e quindi di **necessitazione (entailment) causale**: “(il referente di) p precede necessariamente (il referente di) q ” come **duali** a quelle di **inclusione logica** $\langle p \subset q \rangle$ e quindi di **necessitazione (entailment) logica**: “ q segue necessariamente a p ”.

2. Ha evidenziato il **carattere modale** delle nozioni di **necessitazione logica** $\Box$ e **necessitazione causale** $\Box^C$ come formalizzazioni, rispettivamente delle nozioni di **implicazione stretta**: $(\alpha \twoheadrightarrow \beta) := (\Box(\alpha \rightarrow \beta)) \leftrightarrow (\neg\Diamond(\alpha \wedge \neg\beta))$ e di **controimplicazione stretta**: $(\alpha \leftarrow \beta) := (\Box^C(\alpha \leftarrow \beta)) \leftrightarrow (\neg\Diamond(\neg\alpha \wedge \beta))$.

- ◆ Allo stesso tempo questa analisi evidenzia il **limite** logico di una soluzione del problema del **bi-condizionale onto-logico** ($\Leftrightarrow$) in quanto distinto da quello **logico** ($\leftrightarrow$), semplicemente componendo il verso **ontico** ($\leftarrow$: “se l’effetto allora la causa”) con quello **logico** ($\rightarrow$: “se la premessa allora la conclusione”) dell’implicazione.
- ◆ Infatti, la relazione di causazione “(il denotato di) p causa (il denotato di) q ”, ovvero $\langle p \rightarrow_c q \rangle$ come corrispettivo ontico della lettura semantica della relazione di controimplicazione ($p \leftarrow q$), nel senso di “la verità di q (denotante l’effetto) implica la verità di p (denotante la causa)” non conserva **sempre** la verità da p a q come si richiede invece in un **bi-condizionale onto-logico**.

Basta, infatti, guardare alle righe 1 e 2 della tavola di verità della contro-implicazione stretta per capire che non sempre in una relazione causale “la verità di p (denotante la causa) implica la verità di q (denotante l’effetto)”.

- ◆ È in questo che consiste il problema della differenza fra causa e legge, fra **necessitazione causale** e **necessitazione logica**: una causa produce sempre l’effetto se e solo se è sottoposta a legge.
- ◆ Di qui la soluzione moderna di Leibniz e Kant di fondare la necessitazione causale su quella logica, ovvero di legare il bi-condizionale ontologico a un’**interpretazione empirica** del bi-condizionale logico dell’equivalenza, e quindi ad un’interpretazione **concettualista** del naturalismo e dell’ontologia delle scienze naturali.
- ◆ Se non vogliamo seguire questa via moderna di (non-)soluzione del problema che di fatto elimina uno dei corni del dilemma (la necessitazione causale), con le conseguenze che ne sono derivate (cfr. Appendice di questa sottosezione), dobbiamo determinare sotto quali condizioni la **verità** fra antecedente e conseguente in un **bi-condizionale ontologico** può essere conservata senza supporre una soggiacente **tautologia**, cioè la loro equivalenza logica.

- ◆ La soluzione aristotelico-tomista, ma sarebbe meglio dire **naturalista**, perché ripresa, come vedremo, sia in ambito di **fisica fondamentale** (QFT) che di **logica computazionale** (TCS), consiste nel considerare nel bi-condizionale ontologico le relazioni **reali** fra cose come **semantica** delle relazioni logiche fra simboli del calcolo.
- ◆ Se vogliamo usare la formalizzazione modale della teoria aristotelico-tomista sopra illustrata (Cfr. §4.8.2), la soluzione consiste nel prendere la necessitazione **causale** (*causal entailment*, inclusione causale) come **fondamento** (= semantica) della necessitazione **logica** (*logical entailment*, inclusione logica).
- ◆ Per capire questo *posit* naturalista in filosofia formale occorrono due passaggi:
 1. Interpretare l'inversione delle relazioni di implicazione causale e logica come un caso particolare di **dualità** in teoria delle **categorie** fra una **categoria** (**Cat**) e la sua **opposta** (**Cat^{op}**), che **conserva sempre la verità** fra le due direzioni dell'opposizione. Nel nostro caso specifico, si tratta della dualità fra un **algebra** (**Alg**) e la sua **coalgebra** (**Alg^{op}**) **funtoriale**, dove cioè esiste un **funtore** che manda uno

stesso morfismo dall'una all'altra – il che giustifica la conservazione della verità per asserti definiti su ciascuna delle due. Applicata dalla TCS alle logiche booleane, queste nozioni giustificano l'asserto generale che la coalgebra fornisce la **semantica** della connessa algebra di Boole e della **logica equazionale** (= traduzione booleana di una logica proposizionale) che può essere definita su di essa. Corollario di tale interpretazione è la dimostrazione che “le semantiche modali – nello specifico, la semantica relazionale di Kripke – sono coalgebriche”.

2. Dimostrare che gli insiemi su cui la semantica coalgebrica di un'algebra di Boole è definita sono **insiemi non-benfondati (*non-wellfounded sets*) di Aczel**, ovvero un particolare tipo di **insiemi non-standard**, che consentono **l'auto-inclusione di insiemi** e quindi **successioni infinite (non-limitate) di inclusioni di insiemi**, essendo **gli insiemi standard gli insiemi benfondati (*wellfounded sets*)** delle ordinarie teorie assiomatiche degli insiemi (p.es., ZFC e NGB). Una dimostrazione fondamentale, questa, ottenuta dalla TCS perché libera **la semantica insiemistica** in logica computazionale dalle pastoie della semantica del secondo ordine della teoria degli insiemi standard e, in logica filosofica, fornisce una **dimostrazione di**

completezza della semantica modale, nello specifico, completezza della **semantica relazionale di Kripke** e delle sue successioni infinite di inclusioni di modelli – strutture ad albero definite su insiemi aperti incluse. Una dimostrazione che, ovviamente, non può essere ottenuta in una teoria standard degli insiemi. Per ciò stesso si ottiene in filosofia formale l'adeguata **formalizzazione algebrica** della **causalità formale aristotelica** che Leibniz cercò invano nella sua *Characteristica Universalis*, prodoroma della successiva Algebra Universale. La formalizzazione algebrica della causalità formale va dunque trovata nella **dualità funtoriale Algebra Universale-Coalgebra Universale**, a livello semantico, perciò, e non sintattico!

Due corollari della suddetta dimostrazione sono da essere evidenziati:

- a. **Nell'ontologia della fisica fondamentale**. La cosmologia evolutiva richiede una fondazione causale nell'evoluzione dell'universo delle stesse leggi matematiche della fisica. Ciò ha portato i fisici teorici a cercare di costruire una **teorica causale degli insiemi** che consentisse la formalizzazione matematica di **alberi evolutivi** definiti su insiemi aperti di insiemi parzialmente ordinati (cfr. Ungerer-Smolín 2015). Ciò si ottiene immediatamente se le inclusioni su

insiemi di Aczel nelle coalgebre funtoriali della QFT sono interpretate come **inclusioni causali** come formalizzato in RN.

- b. **Nella formalizzazione dell'ontologia aristotelico-tomista della causalità.** Il carattere funtoriale della semantica della causalità in RN appare in assoluta continuità con la teoria aristotelico-tomista della causalità che suppone la necessità di una **similitudine** – algebricamente un omomorfismo non necessariamente isomorfo – fra causa ed effetto, nel senso che la causa **rende simile a sé** l'effetto. Nella esemplificazione aristotelica dell'idea, il fuoco rende simile a sé il corpo riscaldandolo, partecipando ad esso il suo calore (qualità). Nella semantica tommasiana dell'analogia, l'**analogia di attribuzione** fonda, infatti, l'**analogia di proporzionalità**. L'analogia di attribuzione (o di proporzione) è quella fondata sulla causalità (l'analogia, secondo cui, per esempio, si attribuisce analogamente “la sanità” al cibo o al sangue dell'animale, in quanto rispettivamente “causa” ed “effetto” della sanità che, propriamente, si può attribuire solo all'animale). L'analogia di proporzionalità è invece quella, puramente logica che suppone la sola identità di struttura definita su domini

diversi di oggetti (= diversi modelli di un'unica struttura: p.es., “arco” predicato analogamente di un oggetto geometrico (arco di cerchio), di uno architettonico, e di uno da guerra. In inglese, invece, dove il termine è univoco, essi si denotano rispettivamente come *arc*, *arch* and *bow*).

5.1.1. Appendice I: fondazione ontica della verità logica nell'ontologia RN

- ◆ Per comprendere **la semantica della teoria metafisica della partecipazione**, occorre citare un passaggio fondamentale del testo-base di semantica della metafisica e della teologia di Tommaso: le *Quaestiones Disputatae De Veritate* (I, 2co).
- ◆ La dottrina ivi contenuta è riproposta in molteplici testi paralleli, ma meno completi di questo. Il principio qui enunciato è molto chiaro. Contro il principio ontoteologico della teologia neo-platonica, **l'intelletto umano è misurato dalle cose**, non dall'intelletto divino, sebbene le cose in quanto “create da Dio”, nel modo illustrato nella sottosezione precedente, sono a loro volta “misurate” dall'intelletto divino e dalla sua causalità prima. Ecco il testo di Tommaso:

«Da questo appare evidente che le cose naturali (res naturales), da cui il nostro intelletto prende (accipit) la scienza misurano (mensurant) il nostro intelletto, come si dice nel libro X della Metafisica. Esse sono, tuttavia misurate dall'intelletto divino in cui esse tutte esistono come artefatti (artificiata) nell'intelletto dell'artefice (artificis). Pertanto, l'intelletto divino è misurante non misurato; le cose naturali sono misurate e misuranti: il nostro intelletto, però, è misurato e non misurante, sebbene anch'esso è misurante, ma solo dei nostri artefatti. La cosa naturale, dunque, in quanto posta in mezzo ai due intelletti, è definibile “vera” rispetto ad ambedue. Infatti, secondo la sua adeguazione all'intelletto divino è definibile come vera nella misura in cui soddisfa (implet) ciò a cui è ordinata dall'intelletto divino».

- ◆ È chiaro dunque che la nozione di *verità ontologica* come “adeguazione delle cose e dell'intelletto” (*veritas est adaequatio intellectus et rei*) è costituita da una **relazione composta** [Due relazioni in logica si dicono “composte” quando il codominio (*definiendum*) dell'una è dominio (*definiens*) dell'altra, o viceversa], **intelletto-divino/cosa/intelletto-umano** nelle due direzioni opposte in cui essa si può definire, generalmente denotate come:

1. **Verità ontica** della relazione di dipendenza causale della cosa dall'intelletto divino o comunque da una **causa comune** a tutte le cose (“adeguazione della cosa all'intelletto”, *adaequatio rei ad intellectum*, perché è questo a fondare (“misurare”) quella, quindi: intelletto $\rightarrow$ cosa);
 - ◆ **Verità logica** della relazione di dipendenza causale dell'intelletto umano dalla cosa, attraverso i sensi (“adeguazione dell'intelletto alla cosa”, *adaequatio intellectus ad rem*, perché è questa a fondare “misurare” quello: intelletto $\leftarrow$ cosa).
 - ◆ Esiste dunque nella dottrina tommasiana della verità ontologica una “composizionalità” delle relazioni intelletto/cosa/intelletto nei **due versi** in cui queste relazioni si possono costituire, perché hanno sempre nella “cosa” il termine comune. I due versi sono:
 1. **Ontologico-discendente**, intelletto divino $\rightarrow$ cosa $\rightarrow$ intelletto umano;
 2. **Epistemologico-ascendente**, intelletto umano $\rightarrow$ cosa $\rightarrow$ intelletto divino
 - ◆ Nel contesto della **Teoria delle Categorie (Cfr. §5.4)**, **verità ontica e logica** costituiscono dunque, per la molteplicità delle cose e degli intelletti, **due categorie di verità in relazione di equivalenza duale l'una all'altra**

per l'inversione delle **direzioni dei morfismi** (frecce) **ontici e logici** e dell'**ordine** delle composizioni (intelletto-cosa; cosa-intelletto).

- ◆ Il fatto tuttavia che, sebbene specularmente, a frecce invertite, condividono la medesima struttura formale – sono cioè **omomorfe** – giustifica la definizione di esse come due componenti della *verità ontologica*.

5.1.2. Appendice II: le conseguenze della soluzione moderna del problema

- ◆ L'obbligo moderno di fondare la necessità causale sulla necessità logica ha delle conseguenze **epocali** che caratterizzano il passaggio dalla filosofia classica alla filosofia moderna:
 1. Passaggio dalla concezione classica di scienza come ***cognitio certa per causas***, alla concezione moderna della ***cognitio certa per leges***;
 2. Impossibilità di una **metafisica naturalista** di tipo causale (vedi la famosa opera di Kant *Prolegomeni ad ogni metafisica che in futuro vorrà presentarsi come scienza*, tutta centrata sull'impossibilità di una metafisica naturale per l'impossibilità di una fondazione non logica della causalità):

- a. Impossibilità di una **fondazione causale delle nature** dei corpi → esistenza di **un'unica natura** (Spinoza) per l'unicità delle leggi matematiche per tutte le scienze naturali;
- b. Impossibilità dell'esistenza di **cause libere nel mondo naturale** (cause capaci di determinare se produrre o no un effetto: Dio, uomini...) → impossibilità di un'**antropologia** e di una **teologia naturali** → conflitto moderno fra **determinismo delle leggi di natura, libertà dell'uomo e libertà di Dio**.
- c. Tentativo moderno di una teologia naturale basata sull'interpretazione di Dio come **“legislatore della natura” e non più “causa prima”** (“Dio-orologiaio” di Newton) e successiva crisi dell'idea:
 - Con l'equivalenza spinoziana **Dio-determinismo leggi di natura** (*Deus sive natura*);
 - Fondazione **concettualista** (=autocoscienza **trascendentale**) delle leggi logico-matematiche della natura e delle leggi morali (formalismo etico) nel kantismo;
 - Scoperta della **natura statistica delle leggi fisiche e biologiche**, basate sull'identità di “caso e necessità”, in conseguenza delle leggi di Gauss (→

conflitto teologia-evoluzione: cfr. la metafora “dell’orologiaio cieco” di Dawkins);

- Involuzione **volontarista del concettualismo trascendentalista** → nihilismo e relativismo contemporanei...

5.2. Dualità in matematica, logica e logica modale

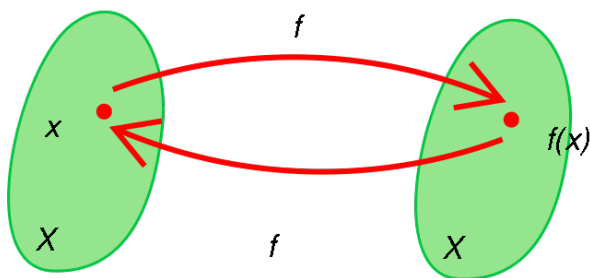
5.2.1. Dualità in matematica e logica

- ◆ Il concetto di **dualità** è largamente usato sia in matematica, teorica e applicata – soprattutto in fisica-matematica –, che in logica.
- ◆ Uno dei maggiori matematici viventi il Premio Field per la matematica 1986, l’indiano M. Atiyah, in uno scritto che viene unanimemente definito come una delle migliori sintesi al riguardo¹ anche se si limita ad alcune dualità solo in matematica e fisica, senza citare le dualità in logica, così inizia il suo saggio:

La dualità in matematica non è un teorema, ma un “principio”. Ha un’origine semplice, è molto potente e utile ed ha una lunga storia che va indietro di centinaia di anni. Nel tempo è stato adattato e modificato e così noi oggi l’usiamo in nuove

*situazioni. Essa appare in molti soggetti, sia in matematica (geometria, algebra, analisi), che in fisica. Fondamentalmente la dualità **fornisce due differenti punti di vista per guardare allo stesso oggetto**. Vi sono molte cose che hanno due differenti punti di vista e, in linea di principio, sono tutte dualità.*

- ◆ Infatti, generalmente con “dualità” s’intende **in matematica** la traducibilità in una relazione uno-a-uno di concetti, teoremi, strutture in altri concetti, teoremi o strutture attraverso (ma non sempre) operazioni di **involuzione**, così che se il duale di A è B , il duale di B è A .
- In matematica, un’involuzione è una funzione che è la sua propria inversa, cioè: $\langle f(f(x)) = x \rangle$, cosicché quando applicata due volte riporta al suo punto di partenza: $f: X \rightarrow X$, cioè:



♦ Il concetto di dualità in teoria degli insiemi è strettamente legato alla **teoria dell'ordinamento**, sono così esempi di **dualità** le seguenti relazioni:

1. Le relazioni di **superinsieme/sottoinsieme**, $\supset/\subset$, in qualsiasi collezione di insiemi;
2. Le relazioni di **divisore/multiplo** definite su insiemi di numeri interi;
3. Le relazioni di **antenato/discendente** definite su insiemi aperti.

♦ In **logica** “le madri di tutte le dualità” sono le due fondamentali **leggi di De Morgan** di logica delle proposizioni, riguardo i tre predicati (connettivi) di **coniunzione, disgiunzione, negazione** cui, non casualmente, corrispondono i tre fondamentali **operatori insiemistici** di **intersezione, unione, complementazione** che definiscono una **logica di Boole**, e quindi la fondamentale equivalenza fra **logica proposizionale e logica equazionale**.

♦ **Informalmente**, le due leggi si leggono:

1. **non**(**A o B**) è lo stesso che (**nonA**) e (**nonB**)
2. **non**(**A e B**) è lo stesso che (**nonA**) o (**nonB**)

♦ **Formalmente**:

1. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

$$2. \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

♦ Dalla fondamentale dualità espressa dalle leggi di De Morgan, altre fondamentali dualità logiche sono quelle:

1. Fra **quantificatore universale** e **quantificatore esistenziale**, in logica dei predicati data la stretta relazione fra il primo e la **coniunzione delle proposizioni quantificate** e fra il secondo e la **disgiunzione delle proposizioni quantificate**, ambedue in un determinato modello, ovvero:

Dato che $\forall x Px \Leftrightarrow (Pa \wedge Pb \wedge Pc)$ e $\exists x Px \Leftrightarrow (Pa \vee Pb \vee Pc)$, per le leggi di De Morgan derivano immediatamente le dualità – fra l'altro alla base dello stesso quadrato delle opposizioni logiche di Aristotele:

$$\forall x Px \Leftrightarrow \neg \exists x \neg Px$$

$$\exists x Px \Leftrightarrow \neg \forall x \neg Px$$

Quindi, data la stretta interconnessione fra i quantificatori e gli **operatori di logica modale**, due altre dualità fondamentali derivano, quelle:

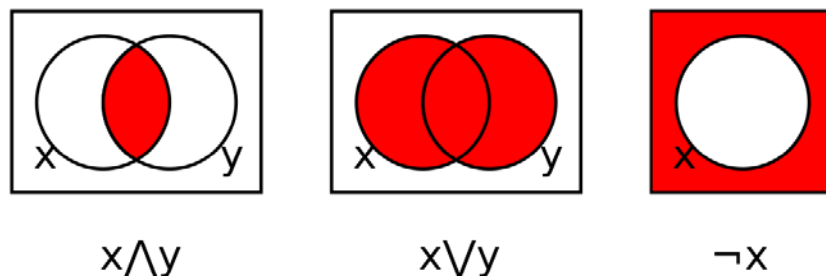
2. Fra **gli operatori di necessità/possibilità** in logica modale, ovvero:

$$\Box p \Leftrightarrow \neg \Diamond \neg p$$

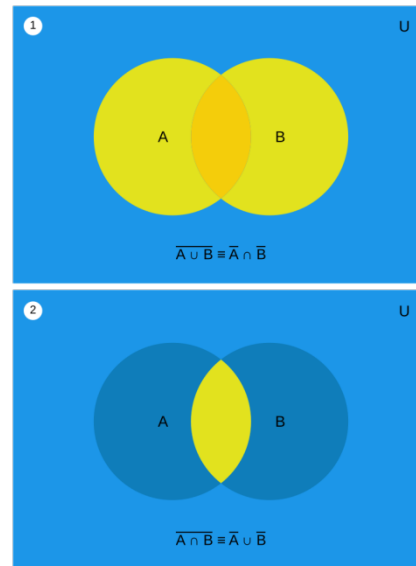
$$\Diamond p \Leftrightarrow \neg \Box \neg p$$

5.2.2. Dualità nella logica di Boole e in logica proposizionale

- ◆ Poiché tutti i connettivi logici possono essere derivati dai tre principali ($\wedge, \vee, \neg$) coinvolti nelle leggi di De Morgan (cfr. sopra §4.5.1) si comprende come essi costituiscano **la caratterizzazione** (*signature*) di un'algebra di Boole con operatori definiti su insiemi (BAO), e dove quindi i simboli $(0,1)$ costituiscano altrettante valutazioni sulle corrispondenti proposizioni: $(\top, \perp, \wedge, \vee, \neg)$.



- ◆ Di qui l'ovvia rappresentazione insiemistica delle 2 leggi di De Morgan e quindi in un'algebra di Boole:



- ◆ Per completare il quadro, e capire immediatamente la connessione fra logiche di Boole e TCS, ecco gli schemi delle principali **porte logiche (logical gates)**, implementabili in altrettanti circuiti di un calcolatore, corrispondenti ai fondamentali **connettivi logici** (o predicati proposizionali) della logica delle proposizioni:

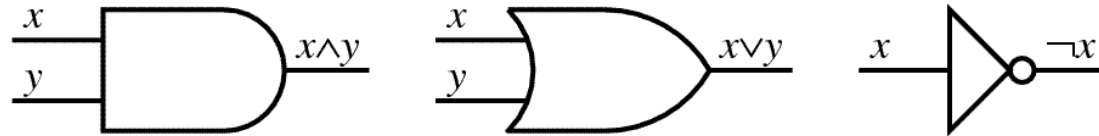
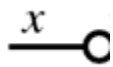


Figure 3. Logic gates

- ◆ E le due porte logiche corrispondenti alle **due leggi di De Morgan**:

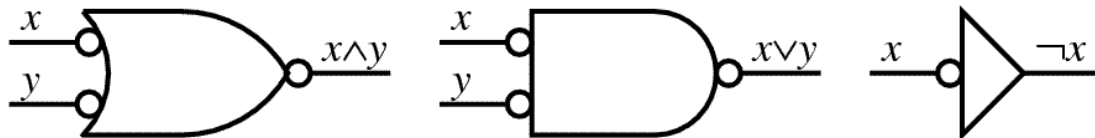


Figure 4. De Morgan equivalents

- ◆ Per completare, il quadro, occorre inserire anche **porta di implicazione** ($\neg x \vee y$), recentemente implementata, sia in ingegneria elettronica, che in bioingegneria:



- ◆ Di qui il seguente schema riassuntivo di tutte le principali **operazioni logiche** di logica delle proposizioni, con i relativi **diagrammi di Venn**, in quanto tutte incluse nel corrispondente **diagramma di Hasse**:

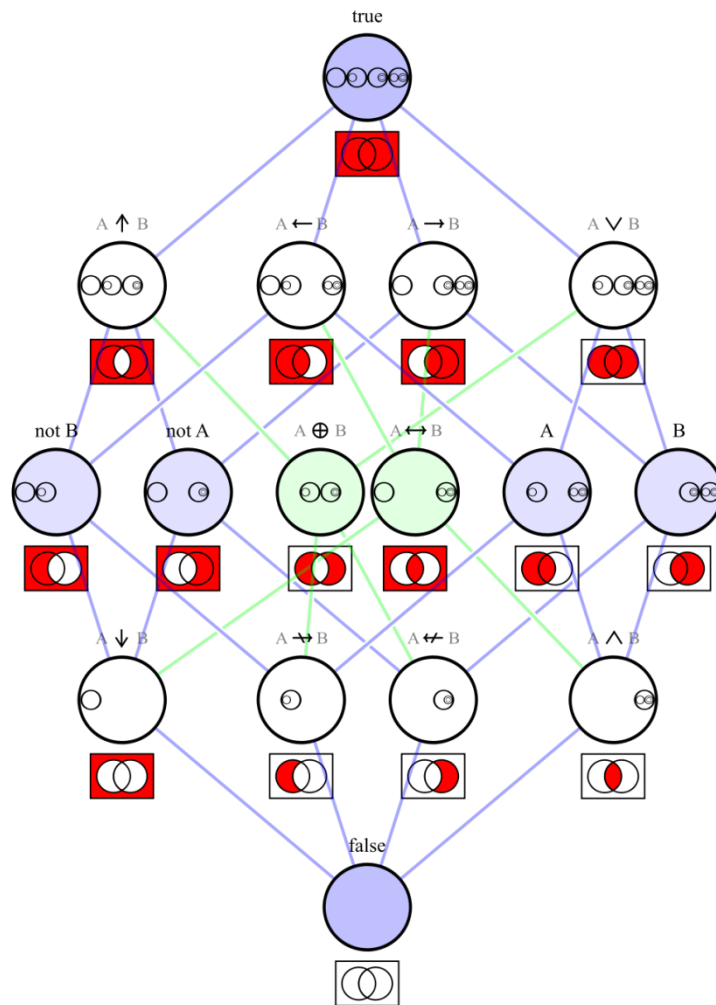


Figura 5 (cfr. Figura 6)

5.3. La logica di Boole nella cosiddetta “era di Stone”

5.3.1. Spazi topologici e insiemi aperti e chiusi

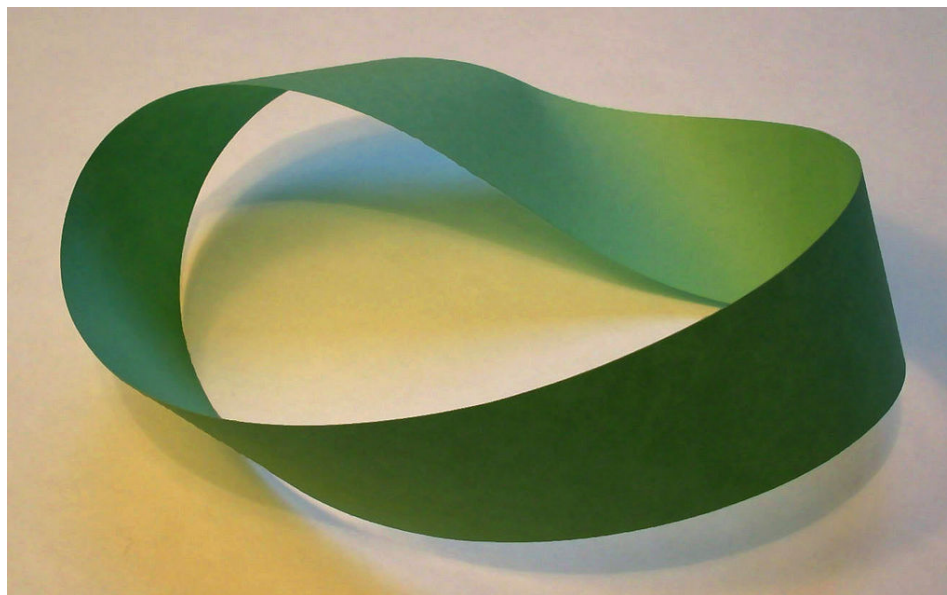
- ◆ Per comprendere il fondamentale **teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole** dobbiamo prima introdurre alcune nozioni fondamentali di **topologia**.
- ◆ **Storicamente**, la topologia come fondamentale branca della matematica, risale alla *analysis situs* di Leibniz come studio di determinate **proprietà qualitative** degli spazi geometrici, essendo il *situs* (in quanto distinto dalla categoria dello *spazio*) una delle dieci **categorie aristoteliche** con cui lo Stagirita designava relazioni di ordine fra enti non riducibili a quelle spaziali o temporali (p.es., nella Scolastica, le diverse gerarchie di enti anche spirituali (angeli) occupavano differenti “siti”).

◆ Nell’uso moderno, la topologia può definirsi formalmente come
*Lo studio delle proprietà qualitative di un certo tipo di oggetti (chiamati **spazi topologici**) che sono invarianti sotto un certo tipo di trasformazioni (chiamate mappe*

*continue), specialmente quelle proprietà che sono a loro volta invarianti sotto un certo tipo di trasformazioni (chiamate **omeomorfismi** – da non confondersi con gli **omomorfismi**).*

- ◆ Con topologia si intende anche una determinata **struttura** imposta su un determinato insieme X che lo caratterizza come **spazio topologico** determinando certe sue proprietà come **convergenza**, **connessione**, **continuità** sotto determinate trasformazioni → generalità della nozione di “spazio topologico” come una delle nozioni più unificanti nell’attuale matematica.
- ◆ L’intuizione fondamentale che sta dietro alla topologia è che alcuni problemi geometrici non dipendono dalla forma degli oggetti, ma dal modo in cui le parti sono **connesse**. → Uno dei primi lavori di topologia moderna fu la pubblicazione di L. Eulero sui “sette ponti di Königsberg” che dimostrava come non fosse possibile disegnare un tragitto continuo che li attraversasse tutti passando su ognuno una sola volta. Un’impossibilità che dipendeva non dalla loro lunghezza o distanza, ma dalla **connettività**: da come connettevano isole e rive del fiume.

- ◆ Così costituisce un famoso esempio di **omeomorfismo** o di deformazione continua di uno spazio senza “tagli” o “incollaggi”, quella che trasforma una “ciambella” in una “tazza” e viceversa. Così un altro esempio di deformazione continua dello spazio è quella che dà luogo alla famosa “stringa di Möbius” etc.



In **teoria degli insiemi**, dato che una topologia definisce un particolare tipo di relazione che gli elementi dell'insieme possono avere fra di loro, differenti topologie possono definirsi sullo stesso insieme X determinando differenti **spazi topologici**. P.es., **la**

retta dei numeri reali, il piano complesso e l'insieme di Cantor possono essere pensati come uno stesso insieme con differenti topologie.

♦ Formalmente, sia X un insieme e sia τ una famiglia di sottoinsiemi di X . τ si definisce come **topologia su X** se:

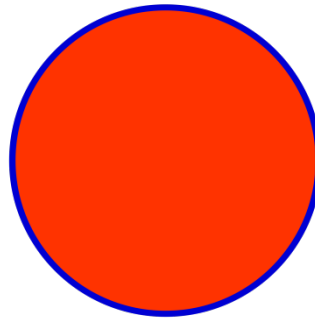
1. Sia **l'insieme vuoto** che **l'insieme X** sono elementi di τ ;
2. Ogni **unione** di elementi di τ è elemento di τ ;
3. Ogni **intersezione** di un numero finito di elementi di τ è elemento di τ .

♦ Se τ è una topologia su X , allora la coppia (X, τ) è definita uno **spazio topologico**.

♦ I membri di τ sono definiti **insiemi aperti** di X . Un sottoinsieme di X è definito **chiuso** se il suo complemento è in τ (cioè se il suo complemento è aperto). Quindi, un sottoinsieme di X può essere: aperto (**opset**), chiuso (**closet**), o ambedue (**clopset**), o nessuno dei due.

♦ Infatti, le due nozioni di insieme “aperto” e “chiuso”, sebbene **complementari, non sono mutualmente esclusive**: un insieme aperto può essere infatti chiuso da un altro insieme aperto, essere cioè un clopset.

- ◆ L'insieme X e l'insieme vuoto sono sempre clopset. Un opset che contiene un punto x è definito come **un intorno di x** .
- ◆ Per familiarizzarci con la nozione di opset, possiamo concentrarci intuitivamente sui punti che definiscono un cerchio.



- ◆ I punti (x, y) che soddisfano $x^2 + y^2 = r^2$ sono colorati in blue e formano un insieme di confine. I punti che soddisfano $x^2 + y^2 < r^2$ sono colorati in rosso e formano un insieme aperto. L'unione dei punti rosso e blue sono un insieme chiuso: il cerchio.
- ◆ Il concetto di **insieme aperto** è in ultima analisi una generalizzazione del concetto di **intervallo fra due numeri** sulla retta dei reali. P.es., l'intervallo $[0,1]$ (inclusi gli estremi) è un intervallo (insieme) **chiuso** sulla retta dei numeri razionali, $[0,1] \cap \mathbf{Q}$, mentre è un intervallo (insieme) **aperto** sulla retta

dei reali $(0,1) \cap \mathbf{R}$. Dove si noti il simbolismo (x,y) per denotare insiemi aperti $[x,y]$ per denotare insiemi chiusi, $(x,y]$ per denotare un clopset aperto a sinistra, $[x,y)$ per denotare un clopset aperto a destra, etc.

- ◆ Per concludere, il concetto di opset e spazio topologico è estremamente duttile e si presta a differenti assiomatizzazioni, una di queste è quella fondamentale per noi legata al teorema di Stone per le algebre di Boole.

5.3.2. Teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole

- ◆ Molti sviluppi della TCS negli ultimi decenni dipendono dal fondamentale contributo del matematico americano Marshall H. Stone (1903-1989) col suo famoso **teorema di Stone** (1936)², più esattamente il suo **teorema di rappresentazione per algebre di Boole** – dove, con “rappresentazione” s’intende in matematica un **isomorfismo** fra due strutture con i loro oggetti, tale che l’una può dirsi rappresentazione dell’altra.
- ◆ Un risultato cui Stone fu portato da un altro, precedente teorema, che lo rese famoso perché su di esso si fonda il formalismo della MQ, il cosiddetto **teorema di Stone-Von Neumann** (1931).

- ◆ Il risultato del 1936 fu comunque di altrettanta importanza nella TCS tanto che gli studiosi parlano di una “nuova era” nella TCS, **l’era di Stone**, o *the Stone Age*, appunto, con uno scherzoso gioco di parole (tutt’altro che una “età della pietra”...), inaugurata da questo teorema nel campo dello studio delle logiche di Boole e quindi dell’intera logica, sia algebrica, che matematica che filosofica, come vedremo³.
- ◆ Sostanzialmente il teorema introduce **quell’equivalenza fra un’algebra di Boole e un reticolo definito** su un insieme parzialmente ordinato. Un’equivalenza che già abbiamo ricordato nell’illustrazione iniziale della logica di Boole in §4.2.
- ◆ L’enunciato rigoroso del teorema di Stone e più ancora la sua dimostrazione sono al di là delle nostre possibilità. Intuitivamente si può dire che esso associa un’algebra di Boole B al suo **spazio topologico** $S(B)$, chiamato **spazio di Stone**.
- ◆ Come sappiamo, con “topologia” o “spazio topologico” si intende in matematica **un insieme di punti con i loro intorni** che soddisfano determinati assiomi, innanzitutto quello di essere uno “senza strappi” e senza avere una

metrica definita su di esso. Generalmente condizioni soddisfatte dall'essere uno spazio topologico definito su insiemi aperti.

- ◆ Ed infatti $S(B)$ è generato da una **base** – ovvero, una collezione di insiemi aperti tale che ognuno degli elementi dello spazio può essere scritto come unione di elementi della base – che consiste di tutti insiemi della forma:

$$\{x \in S(B) \mid b \in x\}$$

Dove b è un elemento di B .

- ◆ I punti in $S(B)$ sono **gli ultrafiltri su B** , o equivalentemente **gli omomorfismi da B ad un'algebra di Boole a due elementi**. Cerchiamo di capire almeno intuitivamente questa definizione perché importante per noi.
- ◆ Un ultrafiltro è un **filtro massimale** di un dato insieme, ovvero il massimo sottoinsieme parzialmente ordinato (= **massimo filtro**) dell'insieme-potenza di un dato insieme (Cfr. **Figura 6**).
- ◆ Per esempio, dato il reticolo P che rappresenta l'insieme potenza dell'insieme S di 4 elementi $\{1,2,3,4\}$, ordinato in base alle inclusioni in un grafico di Hasse, i sottoinsiemi indicati in verde nella figura costituiscono un ultrafiltro a partire dall'**elemento principale** $\uparrow\{1\}$, dove con $\uparrow$ si denota che tutti

gli insiemi del filtro sono “chiusi verso l’alto”. Sono cioè insiemi aperti (intersezioni) chiusi da altri insiemi aperti (intersezioni), sono cioè dei clopset.

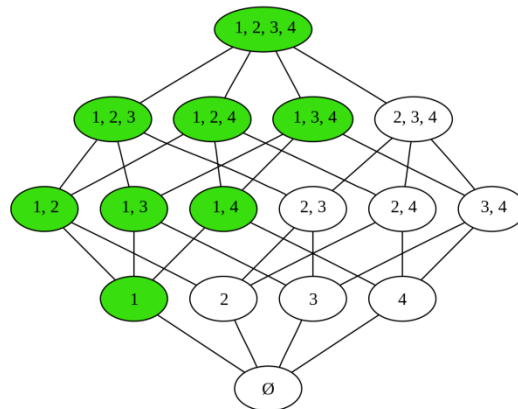


Figura 6 (Cfr. Figura 5)

- ◆ Tornando al nostro ultrafiltro, più in generale, dato un insieme S si può definire sull’insieme potenza di S $\mathbf{P}(S)$ un ordinamento parziale per inclusione $\subseteq$ che ne fa un reticolo come in Figura 6, ovvero $(\mathbf{P}(S), \subseteq)$. Si definisce **ultrafiltro** U il filtro F massimale (ovvero quello di cui non se ne può definire uno più grande) tale che:
 1. S è in F , e se A e B sono in F così la loro intersezione (= F è chiuso sotto intersezione finita);

2. L'insieme vuoto non è in F ($= F$ è un filtro proprio);
3. Se A è in F e A è un sottoinsieme di B , allora anche B è in F per tutti i sottoinsiemi di S (F è chiuso verso l'alto $\uparrow$ (*upset*)).
- ◆ Infine, il filtro minimale che contiene un dato elemento p o **elemento principale** è detto **filtro principale** e consiste nell'insieme $\{x \text{ in } F \mid p \leq x\}$ ed è denotato usando come prefisso $\uparrow p$. Nell'esempio in figura, l'elemento principale è $\uparrow\{1\}$.
 - ◆ Il **duale** di un filtro è definito l'**ideale** I , più esattamente, in teoria degli insiemi, l'**ideale primo** che si ottiene semplicemente **invertendo tutte le relazioni** in F , ovvero $x \leq y$ con $x \geq y$, sostituendo intersezioni con unioni, e quindi $\wedge$ con $\vee$. Il che ci riporta alle leggi di De Morgan. In questo caso, l'elemento principale p contenuto nell'**ideale principale** denotato come $\downarrow p = \{x \text{ in } I \mid x \leq p\}$, nel nostro caso in **Figura 6**, l'ideale principale sarà: $\downarrow\{1,2,3,4\}$.

- ◆ Un ideale è dunque costituito di inclusioni fra unioni di sottoinsiemi aperti **chiusi verso il basso** (I è chiuso verso il basso $\downarrow$ (*downset*)). Di qui la definizione che uno spazio di Stone associabile ad un'algebra di Boole è sempre costituito di **clopset**.
- ◆ In altri termini, duale di un ultrafiltro è un **ideale massimale** che intuitivamente consisterà nel “leggere” (ordinare) dall'alto in basso l'ultrafiltro colorato in verde in **Figura 6**. In teoria degli insiemi, dunque, un ideale è il duale di un filtro, e un **ideale massimale** è il duale di un **ultrafiltro**.
- ◆ Ora, nel caso di un algebra di Boole B nell'insieme S per ogni elemento a dell'insieme bisogna considerare anche il suo complemento $\neg a$.
- ◆ Di qui l'altra formulazione dell'enunciato del teorema di Stone, data l'algebra di Boole B , se i punti **nello spazio di Stone** $S(B)$, sono gli **ultrafiltri** su B , allora equivalentemente sono gli **omomorfismi** da B ad un algebra di Boole a due elementi, ovvero un'algebra di Boole il cui **soggiacente insieme** o **universo** su cui è definita (*carrier set*) è l'insieme a due elementi così che $B = \{1,0\}$, dove con **omomorfismo** s'intende una **mappatura o relazione fra oggetti che preserva la struttura** fra due strutture algebriche.

- ♦ Intuitivamente, l'ultrafiltro del reticolo di **Figura 6**, nella misura in cui è uno spazio di Stone, è omomorfo al reticolo di **Figura 5** che rappresenta tutte le operazioni logiche soddisfacenti da un'algebra di Boole a due elementi. Per rendersene conto, basta ricordare che l'ideale principale – corrispondente al **supremo** del reticolo booleano associato a $S(B)$, ovvero $\downarrow\{p\}$ – sarà la disgiunzione sempre vera ($0 \vee 1$), mentre il filtro principale – corrispondente all'**infimo** del suddetto reticolo $\uparrow\{p\}$ – sarà la congiunzione sempre falsa ($0 \wedge 1$).
- ♦ Per concludere la nostra disanima del teorema di Stone, soffermiamoci ancora sulle proprietà dello spazio di Stone $S(B)$ in quanto “spazio topologico discreto”. Propriamente esso si definisce come uno spazio **compatto** (non nel senso di uno spazio geometrico costituito di “chiusi” e “limitati”, ma nel senso topologico perché ciascuna delle sue coperture “aperte” ha una “sotto-copertura” finita), **totalmente disconnesso** (in uno spazio topologico solo gli insiemi a un solo punto (l'insieme unitario e l'insieme vuoto) sono connessi)), **di Hausdorff** (i suoi punti hanno intorni disgiunti).

- ◆ Il teorema di Stone può essere ridefinito nei termini della **teoria delle categorie** dicendo che il teorema afferma la **dualità** fra la categoria delle algebre di Boole e la categoria degli spazi di Stone.
- ◆ In ogni caso il teorema di Stone è definito su **insiemi standard** e quindi la sua prova richiede **l'assioma di scelta** almeno in una sua forma più debole. Ovvero, il cosiddetto **teorema dell'ideale primo booleano**, un principio di scelta indebolito che afferma che ogni algebra di Boole ha un ideale primo.
- ◆ Questa osservazione apre la strada alla dimostrazione dell'esistenza di una dualità in termini di teoria delle categorie fra un **algebra di Boole** e la sua **coalgebra funtoriale** che, in quanto definita su **insiemi non-standard di Aczel**, significa un drammatico arricchimento della semantica delle algebre di Boole, dalla logica matematica alla logica filosofica.
- ◆ Infatti, le **logiche modali** hanno una naturale formalizzazione insiemistica – in particolare in TCS e nell'ontologia della QFT applicabile dalla microfisica alla fisica della materia condensata, sistemi biologici e neurofisiologici inclusi – in termini **coalgebrici**, e non solo in termini di logiche del secondo ordine, come di solito è stato fatto in logica filosofica⁴.

5.4. Dualità algebra-coalgebra nella teoria delle categorie

5.4.1. Dalla teoria degli insiemi alla teoria delle categorie (TC)

- ♦ La generalità della nozione di **dualità** in logica e matematica ha portato in questi ultimi decenni allo sviluppo di una nuova disciplina molto astratta in logica e matematica che va sotto il nome di **teoria delle categorie** (TC).
- ♦ Per un'introduzione alle nozioni elementari della TC rimandiamo all'ottima sintesi di S. Abramsky e N. Tzevelekos («Introduction to categories and categorical logic», in *New structures for physics. Lecture Notes in Physics*, 813, a cura di BOB COECKE, Springer, Berlin-New York, 2011, pp. 3-94), ambedue dell'Università di Oxford, scritta appositamente per neofiti della materia – fisici e filosofi innanzitutto – ed a cui ci riferiamo. Qui offriamo solo una sintetica esposizione di alcune nozioni utili ai nostri scopi.
- ♦ Come abbiamo già detto la TC è stata ampiamente sviluppata soprattutto negli ultimi trent'anni in logica, matematica, informatica teorica e, più recentemente in fisica teorica, come un **efficace strumento di analisi formale per**

individuare relazioni e “somialianze” fra strutture logiche e matematiche, astratte e applicate, che altri strumenti meno raffinati non consentono di individuare.

- ◆ Il cuore della TC rispetto all’ordinaria teoria degli insiemi, che è stata per quasi due secoli l’unico strumento metalogico e metamatematico con cui indagare queste relazioni, è che **la TC si pone a un livello più astratto di analisi**, in quanto i suoi oggetti fondamentali non sono “elementi” di cui gli insiemi sono costituiti, ma “**frecce**”, quelle che in teoria degli insiemi sono denotate come “funzioni”. Cerchiamo di capire questo punto fondamentale.
- ◆ Nella teoria degli insiemi, le funzioni, $y = f(x)$, sono concepite come relazioni orientate o “frecce” ($\rightarrow$) che “mappano”, **pongono in corrispondenza**, ovvero “mandano” ($\mapsto$) elementi x di un insieme (**dominio**), su elementi y di un altro insieme (**codominio**).
- ◆ P.es., in teoria degli insiemi, la funzione (predicato) “essere il doppio di”, $y = 2x$, definita sugli interi è interpretata come una mappa **iniettiva**. Ovvero, una corrispondenza “uno-a-uno”, ma dove **non tutti** gli elementi del codo-

minio sono raggiunti da frecce (Cfr. Figura 5-1), fra l'intero insieme dei numeri interi (negativi e positivi: $\dots, -2, -1, 1, 2, \dots$) che qui abbiamo denotato con X , e un sottoinsieme Y degli interi: l'insieme dei numeri interi pari ($\dots, -4, -2, 2, 4, \dots$). Tutte le frecce che connettono uno ad uno gli elementi dei due insiemi **mantengono quindi la distinzione degli elementi stessi**.

- ◆ Se però definiamo la funzione (predicato) “essere quadrato di”, $y = x^2$, sui numeri reali, con il codominio definito esclusivamente sui reali positivi, la relazione diventa **suriettiva**: “al minimo uno-a-uno” (ovvero, una suriettiva ammette relazioni “molti-a-uno”: Cfr. Figura 5-2), in quanto tutti gli elementi del codominio sono raggiunti da almeno una freccia, ma più di un elemento del dominio può puntare allo stesso elemento del codominio.
- ◆ La relazione dunque **non mantiene la distinzione fra gli elementi**. Infatti, a ogni coppia di numeri uno positivo, l'altro negativo (p.es., $1, 1$; $-2, 2$; $-3, 3$; $\dots$) del dominio, corrisponde un solo numero quadrato ($1; 4; 9; \dots$) nel codominio.
- ◆ Ciò che è importante per i nostri scopi, è ricordare che è possibile ottenere in generale una relazione **biiettiva** (cfr. Figura 5-3), dove abbiamo cioè una

corrispondenza “uno-a-uno” fra **tutti** gli elementi del dominio e del codominio della relazione **componendo** due funzioni. Ovvero facendo sì che il codominio dell’una sia il dominio dell’altra e viceversa.

- ◆ Per passare alla logica, la **biunivocità biunivoca**, cioè, fra insiemi della **medesima cardinalità** della relazione fra insiemi è alla base della cosiddetta **equivalenza estensionale** fra asserti, espressa nel cosiddetto **assioma di estensionalità** nella logica dei predicati, che è alla base di tutta la **logica matematica**.
- ◆ Così TC è uno strumento teoretico usato in qualsiasi branca teorica ed applicata della matematica, della logica e della TCS per formalizzarle in una maniera molto più astratta e generalizzata che se fossero state formalizzate **separatamente**.
- ◆ In particolare TC considera i suoi oggetti (p.es., in matematica e logica, la teoria degli insiemi, la teoria dei gruppi, la teoria degli spazi topologici, etc.) come “collezioni di oggetti con morfismi (freccie)”. Così la nozione di **morfismo** che in matematica è sinonimo di “funzione” ovvero di “relazione fra

(oggetti di) insiemi ordinati”, in TC è connotato come “struttura che preserva le relazioni (*mapping*) fra oggetti della stessa categoria”. In questo senso, “insiemi” (**Set**), “gruppi” (**Grp**), “spazi topologici” (**Top**), etc., sono altrettante categorie.

- ◆ È così molto importante non confondere l’uso delle medesime nozioni/termini in teoria degli insiemi, algebra e TC. Per esempio, morfismo in matematica è sinonimo di **funzione** ovvero di “relazione che pone in corrispondenza (*mapping*) oggetti del dominio e del codominio”. I principali morfismi in questo senso (= funzioni, $f: X \rightarrow Y$) sono:

1. **Iniettivi (uno-al-massimo-uno)**: ovvero iniettivi senza essere suriettivi, se ogni elemento del codominio è relato al massimo con un elemento del dominio

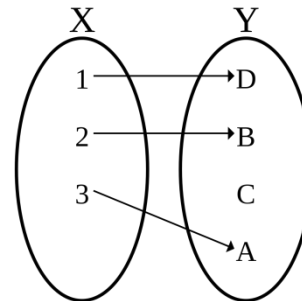


Figura 5-1

2. **Suriettivi (uno-al-minimo-uno)**: ovvero suriettivi senza essere iniettivi, se ogni elemento del codominio è relato almeno ad un elemento del dominio:

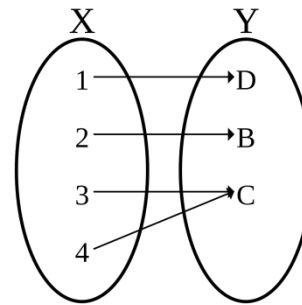


Figura 5-2

3. **Biiettivi (iniettiva e suriettiva)**: se ogni elemento del codominio è relato esattamente a un elemento del dominio (= uno-a-uno senza essere biunivoca):

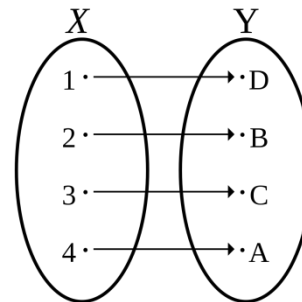


Figura 5-3

- ◆ Generalmente esiste una stretta relazione fra **biiettività e cardinalità degli insiemi**: due insiemi fra i quali è possibile definire una relazione biiettiva fra i loro elementi hanno **la medesima cardinalità** e se omomorfi saranno anche **isomorfi**.
- ◆ Un caso interessante è la composizione biiettiva fra due funzioni:
 $(f: X \rightarrow Y \circ g: Y \rightarrow Z)$

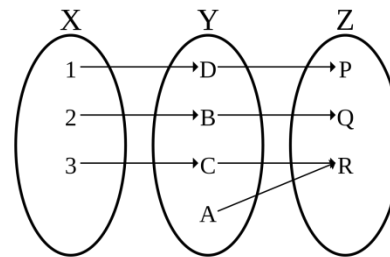


Figura 5-4

- ◆ La prima relazione non necessita di essere suriettiva e la seconda non necessita di essere iniettiva, quindi gli insiemi considerati **non hanno la medesima cardinalità**, sebbene globalmente soddisfino una **relazione biiettiva**.
- ◆ Nella **categoria degli insiemi**, le relazioni iniettiva, suriettiva, biiettiva, corrispondono rispettivamente a **monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo**

fra oggetti e strutture della medesima categoria. Tutti i suddetti morfismi sono altrettanti **omomorfismi**, ovvero relazioni che conservano il morfismo fra le strutture che pongono in relazione.

- ◆ Per completare il quadro degli omomorfismi bisogna aggiungerne altri due principali: l'**endomorfismo** fra una struttura algebrica e se stessa e l'**auto-morfismo**, ovvero, un endomorfismo che è anche un **isomorfismo**. Il seguente schema sintetizza le relazioni di inclusione/intersezione fra tutti questi **insiemi di relazioni omomorfe**:

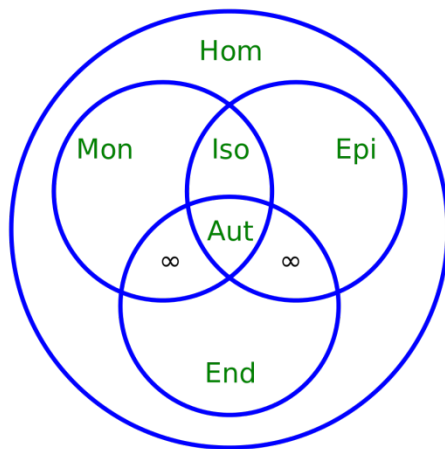


Figura 7

- ◆ Particolarmente interessante per i nostri scopi sono le intersezioni $\mathbf{End} \cap \mathbf{Epi} \setminus \mathbf{Aut}$, cioè endomorfismi che sono epimorfismi senza essere automorfi e quindi **isomorfi**, correlativamente $\mathbf{End} \cap \mathbf{Mon} \setminus \mathbf{Aut}$ che riguardano ambedue **strutture infinite**, ∞ , le quali, ovviamente, non possono essere definite su **insiemi standard** in quanto presuppongono **inclusioni infinite** fra insiemi e/o **autoinclusioni infinite** fra insiemi (rispettivamente, suriettività (**Epi**) iniettività (**Mon**) infinite). Suppongono cioè **insiemi non-standard**, nello specifico gli **insiemi non-benfondati**, come vedremo subito.

5.4.2. Alcune nozioni elementari di teoria delle categorie (TC)

- ◆ Il punto di partenza è che in TC gli oggetti fondamentali non sono “elementi” nel senso insiemistico del termine. In TC essi sono comunque interpretati **sempre come domini-codomini di “frecce” o “morfismi”** – “funzioni” nel caso di insiemi. Questo è **il principio ontologico anti-platonico** (Abramsky) che soggiace alla TC. In tal modo una **categoria** è “qualsiasi struttura in logica o matematica con morfismi che preservano la struttura”.
- ◆ Ogni **categoria** è dunque costituita da:
- ◆ Una collezione di “oggetti”, $A, B, C, \dots$;

- ◆ Una collezione di “freccie” o “morfismi”, $f, g, h, \dots$;
- ◆ Due collezioni di “mappe” **dom**, **cod** che assegnano a ciascuna freccia il suo “dominio” (punto di partenza) e il suo “codominio” (punto di arrivo) di oggetti;
- ◆ Per ogni tripla di oggetti, A, B, C , una *mappa di composizione*
 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, scritta come $g \circ f$ (o talvolta: $f ; g$), dove B è codominio di f e dominio di g ;
- ◆ Per ogni oggetto A , un *morfismo riflessivo* che ha lo stesso oggetto come dominio e codominio, $A \rightarrow A$, e dunque costituisce una *relazione di identità*, Id_A .
- ◆ In tal modo sono altrettante categorie alcune fondamentali strutture logiche e matematiche (denotate col termine inglese): **Set** (insiemi e funzioni); **Grp** (gruppi e omomorfismi); **Top** (spazi topologici e funzioni continue); **Pos** (insiemi parzialmente ordinati (*partially ordered sets*) e funzioni monotone (=sempre crescenti o sempre decrescenti)); **Vect** (spazi vettoriali definiti su campi numerici e funzioni lineari); etc.

- ◆ I morfismi tra categorie si definiscono col nome di *funtori*, F , ovvero operazioni che mappano oggetti e frecce da una categoria $\mathbf{C}$ all'altra $\mathbf{D}$, $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, in modo da **preservare composizioni e identità**.
- ◆ In tal modo fra le due categorie esiste un **omomorfismo o identità di struttura**, ovvero una relazione **biiettiva** “uno-a-uno” fra oggetti e morfismi **che arriva fino all'isomorfismo** (*homomorphism up to isomorphism*)
- ◆ Generalmente, un funtore F è **covariante**, ovvero mantiene il verso delle frecce e l'ordine delle composizioni. Quindi:
se $f: A \rightarrow B$, allora $FA \rightarrow FB$; se $f \circ g$, allora $F(f \circ g) = Ff \circ Fg$; e se id_A , allora $Fid_A = id_{FA}$.
- ◆ Le due categorie, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, sono però ugualmente omomorfe fino all'isomorfismo se il funtore G che le connette è **controvariante**, ovvero inverte il verso delle frecce e l'ordine delle composizioni, l'unico morfismo a rimanere invariato essendo quello dell'identità, $G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}^{\text{op}}$. Quindi:
se $f: A \rightarrow B$, allora $GB \rightarrow GA$; se $f \circ g$, allora $G(g \circ f) = Gg \circ Gf$; ma se id_A , allora $Gid_A = id_{GA}$.
- ◆ Attraverso la nozione di funtore controvariante, possiamo introdurre perciò la nozione di **dualità di categorie**. Ovvero data una categoria $\mathbf{C}$ e l'*endofun-*

tore $E: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, un funtore, cioè, che pone in relazione strutture (endomorfismi) appartenenti alla medesima categoria, l'applicazione controvariante di questo funtore su tutti i morfismi e le composizioni legherà la categoria $\mathbf{C}$ alla sua opposta $\mathbf{C}^{\text{op}}$, cioè, $E^{\text{op}}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{op}}$. Ciò significa che esiste un **omomorfismo fino all'isomorfismo** fra $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}^{\text{op}}$ attraverso E . Su queste basi è possibile dimostrare *l'equivalenza duale* fra categorie, in simboli: $\mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C}^{\text{op}}$.

- ◆ La dualità in TC è pertanto la corrispondenza fra la proprietà della categoria $\mathbf{C}$ e quelle della sua opposta. In logica, è evidente che si può così formalizzare nel modo più generale la teoria della verità come **corrispondenza** inclusa la teoria tommasiana della verità come *adaequatio* nei due versi della relazione composizionale intelletto-cosa-intelletto, illustrata in §5.1.1.
- ◆ Più specificamente, nella semantica della TC la dualità come tale significa che dato un asserto α definito nella categoria $\mathbf{C}$, scambiando dominio e codominio di ogni morfismo come pure l'ordine delle composizioni fra morfismi, si può ottenere un asserto duale al primo, α^{op} , nella categoria $\mathbf{C}^{\text{op}}$.

- ◆ Cioè α è vero se e solo se α^{op} è vero. In altri termini, la dualità come tale è l'asserto che la verità/falsità è invariante sotto queste operazioni di scambio sugli asserti, essi cioè sono **dualmente equivalenti**. In simboli: $\alpha \rightleftharpoons \alpha^{\text{op}}$, come distinto dall'ordinaria equivalenza della tautologia logica: $\alpha \leftrightarrow \beta$.

5.4.3. Dualità algebra-coalgebra in fisica e in logica matematica

- ◆ Una categoria estremamente interessante per la matematica, l'informatica, la logica e la fisica moderne è la categoria delle algebre, **Alg**. Le algebre costituiscono una categoria perché ogni algebra $\mathcal{A}$, può essere definita come una **struttura definita su insiemi**, caratterizzabile con un **endofuntore** che proietta tutte le possibili combinazioni (**prodotto cartesiano**, $\otimes$) dei sottoinsiemi dell'insieme di partenza su cui l'algebra è definita sull'insieme stesso, ovvero $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.
- ◆ Questa categoria è **fondamentale per la matematica**, perché la matematica moderna è cominciata con l'inizio del programma di ricerca dell'**algebrizzazione della geometria** ad opera di Descartes.

- ◆ Esso è continuato con l'invenzione del **calcolo infinitesimale** ad opera di Newton e Leibniz che, proprio grazie all'algebrizzazione cartesiana della geometria, ha potuto trovare una soluzione al secolare problema della “quadratura delle curve”, che aveva bloccato lo sviluppo della fisica-matematica greca a partire da Archimede.
- ◆ **È fondamentale per la fisica moderna** perché, generalmente, ogni sistema fisico, in quanto modellizzato/modellizzabile matematicamente, è isomorfo a (ovvero può essere rappresentato con) una determinata algebra.
- ◆ **È fondamentale per l'informatica e la logica moderne** perché qualsiasi espressione della logica delle proposizioni può essere rappresentata (è isomorfa con) una formula numerica di logica equazionale – generalmente espressa in una numerazione binaria 1/0 – in **un'algebra di Boole**.
- ◆ L'altra categoria interessante per noi perché fondamentale nella logica della TC quella delle coalgebre, **Coalg**. Generalmente, infatti, una coalgebra può essere caratterizzata come una struttura definita su insiemi il cui endofunctor proietta dall'insieme di partenza sui coprodotti dell'insieme stesso, ovvero $A \rightarrow A \otimes A$.

- ◆ Malgrado le apparenze, però, un'algebra **non è in generale “duale”, nel senso controvariante del termine**, alla relativa coalgebra.
- ◆ Questo è il caso, per esempio di una fondamentale categoria di algebre in fisica, quella delle *algebre di Hopf*, **HAlg**, ampiamente usate per rappresentare sistemi dinamici, sia in meccanica classica che in meccanica quantistica (QM).
- ◆ Ogni *HAlg* è essenzialmente una bi-algebra dove – dovendo rappresentare sistemi **energeticamente chiusi**, “isolati” dall’ambiente (in meccanica classica, immersi nel “vuoto meccanico”) – prodotti (algebra) e coprodotti (coalgebra) **possono essere definiti sulla stessa base** e quindi commutano fra di loro.
- ◆ Esiste cioè una completa “simmetria” – in meccanica classica legata al principio di azione-reazione – **fra un'algebra di Hopf e la sua coalgebra** così che esse risultano ***equivalenti e non dualmente equivalenti***. In questo senso ogni algebra di Hopf, è anche definita **“auto-duale”** ovvero isomorfa a se stessa.

- ◆ Naturalmente, è possibile definire un'equivalenza duale fra algebra e coalgebra mediante un'applicazione controvariante di un medesimo funtore Ω , particolarmente importante **laddove non ha senso supporre che le due siano definiti su una stessa base** e dove quindi prodotti e co-prodotti **non possono commutare**. Ovvero: $\mathbf{Alg}(\Omega) \rightleftharpoons \mathbf{Coalg}(\Omega)^{\text{op}}$. Due sono gli esempi significativi per noi di questa dualità. Uno in **fisica**, l'altro in **matematica** che vedremo nella sottosezione seguente.
- ◆ Partiamo dalla fisica, laddove la controvarianza del funtore **ha una naturale giustificazione fisica nell'inversione della freccia-energia** legata al principio del bilancio termico fra sistema e ambiente (bagno termico). In sostanza, il I Principio della Termodinamica.
- ◆ Ovvero, in un sistema dinamico **aperto**, infatti, dove l'algebra rappresenta il sistema e la coalgebra il suo bagno termico, per esempio nelle cosiddette “teorie di campo termico” inclusa la QFT, **non ha senso rappresentarle sulla stessa base** e quindi **supporre la commutatività di prodotti-coprodotto**.

- ◆ In altri termini, **viene rotta la simmetria sferica di un algebra di Hopf**, essa viene cioè “deformata”, proprio come quando comprimiamo un palloncino, e dove **il parametro di deformazione** di solito è denotato con q ed è un **parametro termico, legato alla temperatura**.
- ◆ Di qui la definizione, in QFT di due categorie **dualmente equivalenti**: quella **delle algebre e delle coalgebre “ q -deformate” di Hopf**, dove q è un parametro termico (temperatura) che corrisponde ad un “**angolo**” **della trasformazione di Bogoliubov T** , ovvero di quello che in QFT si definisce come “**operatore**” **di creazione/annihilazione di particelle (domini di coerenza di fase) dal VQ**. L’angolo di Bogoliubov è infatti uno dei tre parametri (frequenza, ampiezza e angolo di un’oscillazione) che definiscono una **fase**, in teoria dei campi. Ovvero, due onde sono in fase se i tre parametri coincidono.
- ◆ T costituisce così il funtore controvariante che lega **le due categorie** di algebre e coalgebre q -deformate di Hopf in QFT. In simboli:

$q\text{-HAlgT} \rightleftharpoons q\text{-HCoalgT}^{\text{op}}$, dove ogni coppia $q\text{-HAlgT}$, $q\text{-HCoalgT}^{\text{op}}$ rappresenta (modellizza) un sistema quantistico “aperto”, ovvero **il suo bagno termico, incluso**.

5.5. La coalgebra universale come teoria generale dei sistemi dinamici e la giustificazione del bicondizionale ontologico

5.5.1. Insiemi non-benfondati e coalgebra universale

5.5.1.1. *Le origini: infinite inclusioni*

- ◆ L'intuizione che soggiace alla teoria degli insiemi di Aczel fu originariamente ispirata dalla «**Teoria Base degli Insiemi**» di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici del XX secolo, nei suoi famosi seminari sui Fondamenti della Matematica alla Scuola Normale Superiore di Pisa.
- ◆ Ennio De Giorgi fu anche ispiratore e fondatore di IRAFS alla PUL, con i professori Edward Nelson di Princeton e Gianfranco Basti della PUL, per estendere alla filosofia formale queste idee (scarica articolo sulla teoria di

De Giorgi dal portale IRAFS: http://irafs.org/irafs_1/texts/Articolo%20Forti.pdf e l'ultimo articolo da lui scritto per IRAFS prima di morire [“Verso i sistemi assiomatici del 2000”](#).

- ◆ Altri lavori sull'iniziale ricerca sui fondamenti all'IRAFS possono trovarsi nel primo sito di [IRAFS I](#), alla pagina dei download). La prematura morte del prof. De Giorgi bloccò sul nascere questo programma a IRAFS che poi è cresciuto per suo conto nel resto del mondo, innanzitutto con i lavori di Marco Forti e poi con quello di Aczel a conferma della sua bontà ed effettività. Cfr. sulla questione (Sangiorgi 2012b, 19ss.)⁵.
- ◆ L'intuizione comune a tutti questi autori consiste nel consentire in teoria degli insiemi la possibilità di **un'illimitata catena di inclusioni** che, nelle originarie intenzioni filosofiche di De Giorgi consentisse di separare omomorfismi da isomorfismi (cfr. **Figura 7**) e quindi di studiare “il principio di forma” *qua talis* (De Giorgi era un platonico convinto), e nelle intenzioni più applicative di tutti coloro cui sta a cuore la TCS – De Giorgi incluso –

aprisse alla semantica algebrica del primo ordine e alla teoria della computabilità **effettiva** (“la matematica che serve” amava definirla De Giorgi) sconfinite praterie applicative, come di fatto è stato.

5.5.1.2. *Assioma di anti-fondazione (anti-foundation axiom, AFA)*

- ◆ Aczel ha inteso perseguire questo scopo nella maniera più diretta possibile, mediante la rimozione dell'**assioma di fondazione** da ZF – presente comunque in forme differenti in tutte le teorie (per questo definite “standard”) degli insiemi – proponendo una teoria degli insiemi basata sull'**assioma di anti-fondazione** (*anti-foundation axiom*, AFA).
- ◆ L'assioma di fondazione in ZF prende di solito il nome di **assioma di regolarità**, ed afferma in buona sostanza che ogni insieme non-vuoto A contiene un elemento disgiunto da A . Nella logica del primo ordine, questo assioma si legge:

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in x (y \cap x = \emptyset))$$

- ◆ Questo significa che nessun insieme ben-fondato può includere se stesso, e che quindi non è ammessa alcuna catena infinita di inclusioni, così da poter

essere totalmente ordinati. Attraverso l'assioma di scelta in ZFC – come pure con forme più deboli di esso come il Lemma di Zorn: quello che Stone ha dovuto usare per garantire il duale di un ultrafiltro, il primo ideale (cfr. §5.3.2) – il risultato può essere invertito: se non vi sono queste infinite sequenze, allora l'assioma di regolarità è vero.

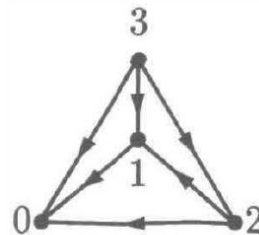
- ◆ → «Il termine “insieme non-benfondato” si riferisce a insiemi che **contengono se stessi come membri** e, più generalmente sono parti di un'**infinita sequenza di insiemi** ognuno dei quali è elemento dell'insieme precedente. Così essi manifestano una **oggettiva circolarità** in una maniera assolutamente evidente» (Moss 2014)⁶.
- ◆ L'assioma di anti-fondazione di Aczel afferma: “**ogni grafo ha un'unica decorazione**” (Aczel 1988).
- ◆ Un enunciato all'apparenza criptico, ma che è molto difficile esprimere in maniera più semplice con altre parole.

5.5.1.3. Rappresentazione di insiemi mediante grafi

- ◆ Il punto di partenza è che ogni insieme (standard o no) può essere rappresentato come un **grafo accessibile puntato** (*accessible pointed graph (APG)*), ovvero, come un insieme di **nodi** che rappresentano i sottoinsiemi dell'insieme **e bordi** che rappresentano le relazioni di inclusione fra sottoinsiemi dell'insieme. Ogni bordo è dunque **una coppia ordinata** di nodi (sottoinsiemi) (n, n') .
- ◆ Se (n, n') è un bordo, allora scriverò $n \rightarrow n'$ e dirò che n' è **figlio** di n . Un **percorso (path)** è una sequenza finita o infinita $n^0 \rightarrow n^1 \rightarrow n^2 \rightarrow \dots$ di nodi $n^0, n^1, n^2, \dots$ legata da bordi $(n^0, n^1), (n^1, n^2)$. Un **grafo puntato** è un grafo con un nodo distinto chiamato il suo **punto**, di solito n^0 che rappresenta l'insieme. Un grafo puntato è **accessibile**, se per ogni nodo n esiste un percorso $n^0 \rightarrow n^1 \rightarrow n^2 \rightarrow \dots n$ dal punto n^0 al punto n . Se questo percorso è **unico**, allora questo grafo è un **diagramma ad albero** e il punto è la **radice** dell'albero.
- ◆ Nei diagrammi, il punto (= insieme) sarà sempre localizzato al **vertice**. Una **decorazione** di un grafo è l'assegnazione di un insieme a ogni nodo del grafo in modo che gli elementi dell'insieme assegnato a un nodo siano gli

insiemi assegnati ai figli di quel nodo. Una **rappresentazione (picture)** di un insieme è un APG in cui l'insieme rappresentato è quello assegnato al punto (= radice o vertice del diagramma).

- ◆ Per esempio, nel caso dell'APG del numero 3, la decorazione è la seguente:



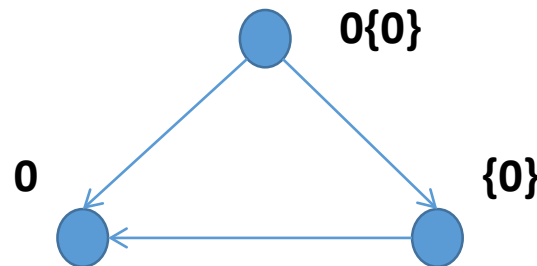
- ◆ Il nodo con l'etichetta 0 non ha figli e quindi ad esso va assegnato **l'insieme vuoto** $\emptyset$, cioè 0, in ogni decorazione. Il nodo centrale ha come solo figlio il nodo etichettato 0. Quindi in ogni decorazione, al **nodo centrale** dev'essere assegnato **l'insieme {0}, cioè, 1**.
- ◆ Ogni insieme standard o non-standard può essere rappresentato con un APG.
- ◆ Nel caso degli insiemi standard o ben-fondati vale il principio: **ogni insieme ben-fondato ha un'unica decorazione** → ogni APG è la rappresentazione di un **unico insieme ben-fondato**.

- ◆ Ma esistono anche rappresentazioni di **insiemi non-benfondati**. Per vedere questo, noi assoceremo a ogni insieme a la sua **rappresentazione canonica**. Ovvero, formiamo il grafo i cui nodi sono quegli insiemi che appaiono in sequenze $a^0, a^1, a^2, \dots$ tali che: $\dots \in a^2 \in a^1 \in a^0 = a$, e che abbiano come bordi quelle coppie di nodi (x, y) tali che $y \in x$.
- ◆ Un siffatto APG **non richiede un insieme ben fondato**. Infatti, ogni rappresentazione di un insieme **può essere dispiegato (*unfolded*) in una rappresentazione ad albero dello stesso insieme**. Ovvero, dato un APG possiamo formare l'albero i cui nodi sono i percorsi finiti che cominciano dal punto dell'APG e i cui bordi sono coppie di percorsi della forma: $a^0 \rightarrow \dots \rightarrow a$; $a^0 \rightarrow \dots \rightarrow a \rightarrow a'$; $\dots$
- ◆ La radice di questo albero è il percorso a^0 di lunghezza uno. Questo albero è lo **svolgimento (*unfolding*)** dell'APG. Quindi, lo svolgimento di un APG rappresenterà qualsiasi insieme rappresentato dall'APG. Lo svolgimento della rappresentazione canonica di un insieme, sarà chiamato la **rappresentazione canonica ad albero** di quell'insieme.

- ◆ Da questa costruzione l'assioma di anti-fondazione deriva immediatamente e cioè:

“Ogni grafo ha un'unica decorazione”

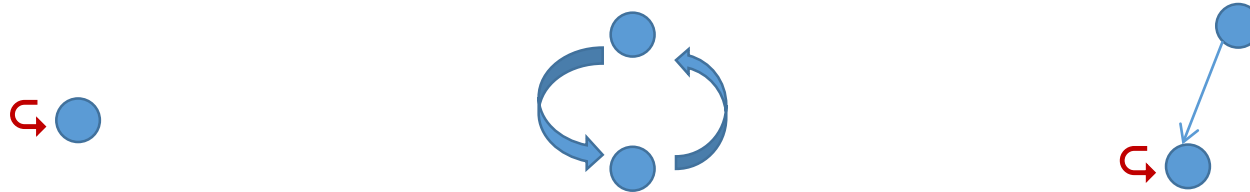
- ◆ Il principale risultato dell'AFA di Aczel è dunque che ogni insieme corrisponde a **un grafo orientato** $(G, \rightarrow)$ dove i bordi rappresentano le **relazioni di inclusione**, i nodi altrettanti **(sotto-)insiemi** (cioè ogni nodo è adornato con un unico insieme), e la **radice** è il nodo con cui **ogni altro nodo nel grafo ha un percorso diretto**. P.es., nel caso dell'APG del numero 2:



- ◆ Poiché AFA consente **le auto-inclusioni** i seguenti grafi sono ammessi:

1. Il grafo orientato con un solo nodo e un bordo dal nodo a se stesso corrisponde all'insieme della forma: $x = \{x\}$.

2. Un grafo orientato a ciclo di lunghezza 2 corrisponde a un insieme della forma $x = \{\{x\}\}$.
3. Un grafo orientato di lunghezza 2 con un solo ciclo, corrisponde all'insieme della forma $z = \{y, \{x\}\}$.



- ◆ Questi 3 grafi hanno una grande importanza in RN perché rappresentano, nella formalizzazione della metafisica dell'essere-come-atto, di Tommaso: 1) il concetto di **sostanza individuale** (prima) come capace di *reditio completa ad semetipsum*; 2) il concetto di **sostanza individuale spirituale** come capace di doppia reditio, una ontologica l'altra logica, ovvero di auto-cono-

scersi; 3) la **partecipazione diretta di ogni individuo all'essere per esistere**, dove la sorgente cui ogni individuo è legato è l'Essere Sussistente. → i bordi di tutti gli APG di RN sono **inclusioni causali**...

5.5.1.4. Equivalenza per bisimilarità/bisimulazione

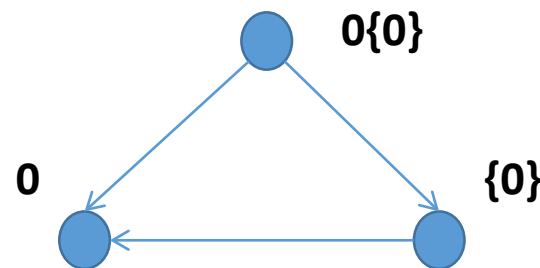
- ◆ Un'altra fondamentale nozione che è possibile dimostrare in una teoria degli insiemi non-benfondati è la nozione di **equivalenza per bisimulazione/bisimilarità**, ovvero di **equivalenza non-estensionale** fra insiemi, una nozione fondamentale in logica modale.

- ◆ **Bisimulazione:** Sia $(G, \rightarrow)$ un grafo orientato. Una relazione R su G è una **bisimulazione** se le seguenti relazioni sono soddisfatte: ogni volta che xRy , dove x, y sono nodi,
 1. Se $x \rightarrow x''$, allora vi è un $y \rightarrow y''$ tale che $x'' R y''$.
 2. Se $y \rightarrow y''$, allora vi è un $x \rightarrow x''$ tale che $y'' R x''$.
- ◆ Naturalmente una tale insieme di relazioni può essere estesa dal grafo G ad un grafo H , etc.
- ◆ Quindi, quando una bisimulazione vale **per tutte le relazioni e i nodi** fra due (o più) grafi, essi sono in relazione di bisimilarità, cioè sono **equivalenti per similarità** a prescindere dalla cardinalità degli insiemi che adornano i nodi – di quante volte, cioè, ciascun insieme e i suoi elementi si auto-includono.
- ◆ Dal punto di vista della teoria algebrica degli insiemi ciò significa che i due grafi sono in una relazione di **omomorfismo** che non necessariamente è di **isomorfismo**: siamo quindi di fronte a un'equivalenza **non-estensionale**.
- ◆ Di qui la possibilità di trattare in una teoria degli insiemi non-benfondati la logica modale e intensionale

5.5.1.5. Induzione/coinduzione e logiche modali coalgebriche

- ◆ Apparentemente basterebbe questa nozione per capire come mai possiamo rappresentare in una coalgebra una logica modale, essendo la negazione dell'assioma di estensionalità uno dei caratteri fondamentali delle logiche modali e intensionali.
- ◆ Ma non è così, per poter giustificare la rappresentazione coalgebrica delle logiche modali e intensionali dobbiamo prima introdurre un'altra dualità fondamentale fra algebre e coalgebre definite su insiemi non-benfondati, quella fra **definizione induttiva e coinduttiva di insiemi** e quindi quella fra **induzione e coinduzione come metodi di prova**.
- ◆ Definiremo fra poco ed in modo rigoroso la dualità induzione/coinduzione come metodi di definizione e di prova in quanto fondamentali per risolvere il nostro problema di una giustificazione formale del bicondizionale ontologico. Per il momento, accontentiamoci di **introdurli intuitivamente** tanto quanto basta per comprendere il passaggio alle logiche modali.
- ◆ Per comprendere la distinzione fra definizione/costruzione induttiva e coinduttiva di insiemi partiamo da un'**evidenza elementare**.

- ♦ Causa l'**ordinamento totale** negli insiemi standard vale la **transitività delle inclusioni I**: $xIy \wedge yIz \rightarrow xIz$. Quando abbiamo a che fare con insiemi di Aczel possiamo, invece, avere anche l'**euclidicità delle inclusioni**: $xIy \wedge xIz \rightarrow yIz$. Di qui la possibilità di definire l'APG del numero 2 nel modo seguente:



- ♦ Questa rappresentazione dell'inclusione non-transitiva (euclidea) di insiemi ci aiuta a capire intuitivamente cosa si intende con definizione **coinduttiva** di insiemi $\downarrow\{x\}$ nella coalgebra. Dalla radice $0\{0\}$ si possono definire coinduttivamente i due sottoinsiemi $\{0\}$ e 0 .
- ♦ Se invertiamo le frecce $\uparrow\{x\}$ tale definizione appare duale rispetto si presta a due possibili **costruzioni induttive** nell'algebra corrispondente:

1. Quella che soddisfa alla costruzione degli **interi** usando per esempio gli assiomi di NGB $0 \rightarrow \{0\} \rightarrow 0\{0\} \dots$;
2. Quella che soddisfa alla costruzione dei **pari**: $0 \rightarrow 0\{0\} \dots$. Il grafo rappresenta dunque **due coalgebre finali** di altrettante **algebre iniziali**⁷.
 - ◆ Il termine “iniziale” e “finale” fanno riferimento ad un altro fondamentale teorema dimostrato da Aczel legato al concetto di **punto fisso**, rispettivamente “minimo” (iniziale) e “massimo” (finale), rispettivamente di un processo induttivo e coinduttivo.
 - ◆ Infatti, data una funzione ricorsiva induttiva $x_{n+1} = f(x_n)$, il necessario punto di partenza della computazione è dato dal punto fisso iniziale $x = f(x)$ che sarà il punto di partenza minimo di costruzione di insiemi aperti verso l'alto $\uparrow\{x\}$. Dualmente per la coalgebra deve esistere un punto fisso finale massimo $\downarrow\{x\}$ da cui il processo di costruzione inversa di insiemi aperti verso il basso della coinduzione, $x_{n-1} = f(x_n)$, parte. Si tratta, come si intuisce, di un corrispettivo su insiemi di Aczel della dualità fra **ultrafiltri** e **ideali primi** del teorema di Stone su insiemi standard (cfr. §5.3.2, slide 227).

- ◆ Per passare alla rappresentazione coalgebrica delle logiche modali, interpretando il grafo coalgebrico di sopra come un *frame* a tre mondi connessi da una relazione di accessibilità euclidea della **semantica relazionale** di Kripke, nel caso della seconda costruzione algebrica, quella dei numeri pari, è come se avessi tagliato via la relazione di accessibilità fra $0\{0\} \rightarrow \{0\}$, ovvero avessi costruito coinduttivamente una **rappresentazione coalgebrica** dell'**operatore modale di possibilità** $\Diamond\{x\}$ per questo universo a tre mondi, che indica, appunto, che la relazione di accessibilità in oggetto non riguarda **tutti** i mondi possibili, ma solo **alcuni**. Nel primo caso, invece, valendo la relazione per tutti, è come se avessi rappresentato l'operatore modale di necessità $\Box\{x\} \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\{x\}$.
- ◆ **Parte di qui la dimostrazione di L. Moss di una interpretazione coalgebrica di tutte le** logiche modali e relativi operatori, ovvero l'estensione della logica Booleana anche alla logica modale (Moss 1999a.b)⁸. In altri termini, per ogni algebra iniziale (induttiva), la sua semantica modale è data funtorialmente dalla sua associata coalgebra finale.

- ◆ Si tenga presente, infatti, che usando questa rappresentazione topologica di una semantica modale di un'algebra Booleana, perché definita su insiemi di Aczel e non standard come quelli del teorema di Stone, è possibile, in linea di principio, rappresentare qualsiasi operatore modale (aletico, epistemico, deontico...). Ognuno di essi, infatti, corrisponderà a **definire una particolare topologia coinduttiva**, rendendo accessibili alcuni sottoinsiemi invece di altri, in base a un determinato **criterio di verità**, (si pensi, p.es., all'operatore “deontico” dell'obbligo che connette solo mondi “buoni”).
- ◆ Questo risultato dipende dal fondamentale **teorema di Aczel** dell'**esistenza di un'unica coalgebra finale** (Aczel 1988, 81ss.), di tutte le parziali coalgebre finali (subcoalgebre, o spazi topologici relativi ad una particolare semantica modale o logica intensionale).
- ◆ Se ora usiamo per rappresentare gli insiemi in oggetto, **la rappresentazione canonica ad albero** di insiemi di Aczel (APG), dove l'insieme di partenza che include i sottoinsiemi è rappresentato dal vertice o **radice** dell'albero, il teorema di Aczel della coalgebra finale significa che esiste un'**unica radice**

finale di tutti gli alberi coinduttivamente costruibili. Una radice finale che coincide con V , la collezione universale (unione) di tutti gli insiemi.

- ◆ La differenza con la teoria standard degli insiemi è che tutti i sottoinsiemi ottenibili, raggruppando secondo diverse topologie (ordinamenti parziali o sotto-alberi) gli insiemi di V sono **coinduttivamente costruibili** come semantiche delle relative algebre di Boole, corrispondenti a diverse **interpretazioni intensionali** di logiche proposizionali modali.
- ◆ Ciò significa aver provato l'esistenza di un'unica **struttura ad albero** di tutti gli infiniti alberi possibili di inclusioni, che, ricordiamolo, costituiscono altrettante **rappresentazioni canoniche** di altrettanti APG. Ciò significa aver provato l'esistenza di un'**unica radice** di tutte le radici, una per ciascun APG (insieme), delle infinite relazioni di inclusione, rappresentabili nella Coalgebra Universale.
- ◆ Di qui deriva, come facilmente intuibile, la dimostrazione di **completezza** della semantica relazionale di Kripke, che appunto suppone, sia l'**equivalenza per bisimulazione** fra modelli, sia l'esistenza di **infinite inclusioni di**

modelli, dimostrazione non ottenibile per coalgebre definite su insiemi standard⁹.

- ◆ Un altro risultato questo, fondamentale per la logica di RN: l'esistenza di un'unica radice di tutte le infinite radici di inclusioni possibili, laddove le inclusioni per coinduzione fossero interpretate come altrettante **inclusioni causali**, significa l'esistenza di una “causalità prima” – il **generatore primario “T”** – di tutte le “causalità secondarie” – ciascuna fondante un determinato **genere naturale** (=essenza), ovvero una struttura ad albero “genere-specie” nel formalismo di RN.

5.5.1.6. Coalgebra universale come teoria generale dei sistemi dinamici

- ◆ Comunque, il passo fondamentale, per poter applicare la nozione di Coalgebra Universale così delineata ai modelli coalgebrici della QFT in fisica quantistica e all'ontologia formale di RN è legata alla fondamentale dimostrazione di J. Rutten della Coalgebra Universale come **teoria generale dei sistemi dinamici** – automi inclusi – interpretati come altrettanti **sistemi a transizione di stato** (*state transition system, STS*)¹⁰.

- ◆ Più esattamente **sistemi labellati a transizione di stato** (*labelled transition system*, LTS) – dove la *label* (etichetta) consiste nella **funzione (induttiva/coinduttiva)** che determina la transizione da uno stato all'altro del sistema (in QFT da una fase all'altra del sistema, o in cosmologia, da una coerenza di fase all'altra del vuoto quantistico).
- ◆ Per capire questo ultimo passaggio, basta riflettere su un semplice dato. Siccome ci troviamo **in una logica del primo ordine** tutti gli insiemi di cui stiamo qui parlando sono **computabili** (cfr. “la matematica che serve” di De Giorgi). Quindi gli insiemi degli APG di Aczel possono naturalmente essere interpretati come **output** dei relativi processi (induttivi/coinduttivi) che li generano.
- ◆ Il passaggio ai sistemi dinamici di fisica quantistica e alla teoria generale degli automi in TCS è legato essenzialmente al fatto che è possibile estendere la nozione di equivalenza per bisimulazione a quella di **equivalenza osservazionale (in fisica quantistica) e/o equivalenza comportamentale (in TCS)**. Infatti, sia in fisica quantistica sia negli automi non-deterministici a

stati infiniti della TCS noi possiamo trattare solo degli **osservabili della dinamica**, senza possibilità alcuna di “guardare dentro” la scatola nera dello stato dinamico considerato.

- ◆ Quindi per capire intuitivamente, per fare della Coalgebra Universale una teoria generale dei sistemi dinamici è sufficiente interpretare **i bordi (inclusioni) degli insiemi di Aczel** come altrettante **transizioni di stato labellate in TCS** e/o come **operatori definiti su uno spazio di Hilbert** – che in QFT include anche gli stati del bagno termico – che in fisica quantistica (in generale, anche in QM) sono gli unici “osservabili” del sistema.
- ◆ Per concludere, alla luce di quanto detto, si comprende l’affermazione generale di Rutten, valida sia in TCS, sia in QFT, sia in RN, che **l’omomorfismo** che connette mediante un appropriato **funtore** (che in QFT è l’operatore di Bogoliubov di “creazione annihlazione di particelle”, e in RN la nozione di causa come fondamento dell’esistenza di enti e di essenze) è – per inversione di frecce e composizioni –, fra un **endomorfismo** in algebra che è un **monomorfismo**, $A \times A \rightarrow A$, che manda induttivamente i morfismi “dentro” l’insieme-base (*carrier set*) su cui l’algebra è definita, e un **endomorfismo**

in coalgebra che è un **epimorfismo** $A \rightarrow A \times A$ che manda coinduttivamente i morfismi “fuori” dall’insieme-base.

5.5.2. Bicondizionale ontologico e dualità in TC

5.5.2.1. Definizione formale della dualità induzione/coinduzione

- ◆ Partiamo di nuovo dalla fondamentale nozione di omomorfismo senza isomorfismo che la coalgebra definita su insiemi di Aczel consente (Cfr. **Figura 7**).
- ◆ A mo’ di esempio, avevamo visto come già in **Set** è possibile avere **biiezioni composte** da iniezioni/suriezioni che non suppongono l’equivalenza degli insiemi coinvolti (Cfr. **Schema 1**). Per rendere corretta l’estensione di questo principio alle biiezioni (omomorfismi) composte da un monomorfismo e un epimorfismo in una dualità funtoriale algebra/coalgebra, bisogna solo ricordare che nel caso coalgebrico l’epimorfismo in questione **non suppone relazioni propriamente suriettive** dei soggiacenti morfismi, se non altro perché l’inversione delle frecce nei morfismi, significa invertire il verso della relazione dominio-codominio su cui la suriezione si definisce.

- ♦ Intuitivamente, i morfismi non sono da molti (dominio) a uno (codominio), come in algebra, **ma da uno (dominio) a molti (codominio)**. Il che significa **la non-transitività delle inclusioni** fra gli insiemi coinvolti e dunque la possibilità di giustificare “inclusioni ad albero”, di nuovo una condizione soddisfacibile solo in insiemi non-benfondati.
- ♦ Ugualmente, l'altra condizione da soddisfare per un'adeguata teoria del bicondizionale ontologico è di giustificare un significato **di processo** (non si può parlare infatti di funzione perché non abbiamo propriamente suriettività) al connettivo causale ($\rightarrow_C$) dell'inclusione causale (cfr. sopra §4.8.3), ovvero all'interpretazione ontica della coinduzione. In termini ontologici le entità referenti di proposizioni predicative poste in relazione di bicondizionalità ontologica sono **generi naturali** di enti fisici, viventi e non-viventi, **causalmente generati/generanti**. La “causa” è dunque **un operatore** che generando i suoi effetti li include causalmente.
- ♦ Per giustificare questa nozione di un'interpretazione, non solo delle classiche relazioni di intersezione e unione, ma anche della relazione di **inclusione** come un **operatore** su insiemi, che “raccolge in unità” gli elementi da

includere in strutture di inclusione ad albero, di nuovo ci vengono incontro le coalgebre definite su insiemi non-standard di Aczel, mediante il potente **principio di coinduzione**, come duale del **principio di induzione** nelle algebre di Boole.

- ◆ Se quest'ultimo, come principio di definizione di insiemi è **costruttivo** – topologicamente: gli insiemi aperti parzialmente ordinati che genera sono *upset* $\uparrow\{x\}$ –, il secondo viene, talvolta, denotato come **distruttivo**, con un'espressione infelice e spesso fuorviante, che invece potremo definire **costruttivo inverso o decostruttivo** – topologicamente: gli insiemi aperti parzialmente ordinati che genera sono aperti verso il basso, sono *downset* $\downarrow\{x\}$. Di qui le definizioni duali di induzione e coinduzione come principi per la **definizione di topologie di insiemi parzialmente ordinati** e come **principi di prova** su tali insiemi.
- ◆ In sintesi, si tratta di un'estensione del **teorema di rappresentazione di Stone** discusso in §5.3.2, slide 227ss., da **insiemi standard** a **insiemi non-**

standard che arricchisce di molto **la semantica del primo ordine** per insiemi algebrici con immense potenzialità, molte ancora da scoprire, in ogni campo della logica, matematica, algebrica e, ora anche, filosofica.

- ◆ Il collegamento al teorema di Stone si evince immediatamente dalla formulazione dei due principi di induzione e coinduzione come principi di definizione e di prova (Sangiorgi 2012, 46)¹¹:

1. **Definizione induttiva e coinduttiva di insiemi attraverso F .** Per un reticolo completo L i cui punti sono insiemi (come nei reticoli completi ottenuti per costruzione sull'insieme potenza (cfr. sopra **Figura 5** e **Figura 6**) e un endofunzione (endomorfismo) F , gli insiemi:

$$F_{ind} := \bigcap \{x \mid F(x) \leq x\} \quad \uparrow \{x\}$$
$$F_{coind} := \bigcup \{x \mid x \leq F(x)\} \quad \downarrow \{x\}$$

Saranno detti, rispettivamente, **insiemi induttivamente** e **insiemi coinduttivamente definiti da F** . Di qui due regole di prova come corollari della suddetta definizione.

2. **Induzione e coinduzione come principi di prova.** Noi abbiamo:

se $F(x) \leq x$ allora $F_{ind} \leq x$ (induzione come principio di prova)

se $x \leq F(x)$ allora $x \leq F_{coind}$ (coinduzione come principio di prova)

- In altri termini, spiega Sangiorgi, l'induzione come principio di prova è la classica prova **costruttiva**, “in avanti (*forward*), dalla premessa alla conclusione: $\rightarrow$ ”, per induzione (ricorsione) $x_{n+1} = Fx_n$. Il che spiega perché $F_{ind} \leq x$.
- Invece la coinduzione come principio di prova è la classica prova **decostruttiva**, “all'indietro (*backward*) dalla conclusione alla premessa: $\leftarrow$ ” per coinduzione (coricorsione) $x_{n-1} = Fx_n$. Il che spiega perché $x \leq F_{coind}$.
- ◆ Il riferimento esplicito di Sangiorgi all'implicazione inversa “ $\leftarrow$ ”, (Sangiorgi 2012, letta come processo di decostruzione da una conclusione alla premessa, ci fa vedere come siamo nel giusto quando ci riferiamo alla interpretazione coalgebrica della logica modale per cercare la logica appropriata al “verso ontico”, dall'effetto alla causa, del bi-condizionale ontologico.
- ◆ Allo stesso tempo, la coinduzione come procedura di prova, se nella logica computazionale della TCS cui Sangiorgi si riferisce, è una procedura deco-

struttiva interpretata **logicamente** dalla conclusione alla premessa che la implica, la prova coinduttiva interpretata onticamente sulla **relazione causale**, è la logica della prova tipica della metafisica naturalista della *resolutio* dell'effetto nella causa che lo **include**.

- ◆ Infine, un'ultima fondamentale notazione sul confronto col teorema di Stone. Ciò che differenzia la dualità algebra-coalgebra, dalla **dualità ultra-filtri-ideali massimali** del teorema di Stone, non è solo che la prima è definita su insiemi non-standard e la seconda su insiemi standard, ma soprattutto che in quest'ultima gli insiemi sono **prodotti di processi** induttivi/coinduttivi di definizione.
- ◆ In altri termini, la semantica coalgebrica è una semantica in cui la soddisfacibilità delle proposizioni del calcolo logico si decide in termini di **stati della macchina accessibili** dal sistema fisico in cui sono realizzati, implementati. Ciò spiega perché J.M. Rutten abbia definito e dimostrato essere la **Coalgebra Universale** la teoria generale dei sistemi dinamici interpretati come **sistemi di transizione di stato (STS)**¹². Il che di nuovo conferma che

la logica coalgebrica è la logica appropriata alla **semantica naturalista** propria di RN, come di qualsiasi **ontologica naturalistica**.

- ◆ A questo punto, avendo definito l'induzione/coinduzione come **procedura duale di prova**, abbiamo tutti gli ingredienti formali per **giustificare formalmente, cioè provare**, la relazione del bicondizionale ontologico, come **organon semantico** fondamentale di **dimostrazione** in un'ontologia e in una metafisica **naturaliste**, e non solo **logiciste o concettualiste** com'è stato in tutta la modernità.
- ◆ Se vogliamo, abbiamo risposto positivamente alla sfida di Kant proposta nei suoi *Prolegomeni ad ogni metafisica che in futuro vorrà ripresentarsi come scienza*.
- ◆ Oppure se vogliamo dirlo nei termini più modesti, ma più formalmente precisi di un Cocchiarella, **il realismo naturale ha un suo calcolo**, grazie a cui può fare a meno della tutela **concettualista** dell'assioma di comprensione fregeano (cfr. sopra, §4.3.2).

5.5.2.2. Giustificazione formale del bicondizionale ontologico

- ◆ Per i nostri scopi, la **conservazione della verità per inversione di frecce e morfismi** che la dualità in TC giustifica, in particolare la dualità algebro-coalgebra definita su insiemi di Aczel, fornisce certamente l'appropriato ambiente formale in cui giustificare la teoria della dualità fra **necessitazione** (*entailment*) **ontica** e **logica**, ovvero la teoria del bicondizionale ontologico come delineata alla fine del cap.4.

- ◆ In simboli:

$$(\alpha \rightleftharpoons \beta) \Leftrightarrow \llbracket (\alpha \rightarrow \beta) \xleftarrow{\quad} (\alpha \leftarrow \beta) \rrbracket \Leftrightarrow 1,$$

- ◆ Dove $(\rightleftharpoons)$ è il **simbolo del bicondizionale ontologico** fra proposizioni del primo ordine, α, β denotanti, in quanto connesse sotto forma di implicazione logica, la causa e l'effetto di un processo naturale (fisico/metafisico); $\llbracket \dots \rrbracket$ è la **condizione necessaria e sufficiente di soddisfacibilità** del bicondizionale, rappresentando $(\alpha \rightarrow \beta)$ il verso **induttivo** logico-algebrico; $(\alpha \leftarrow \beta)$ il verso **coinduttivo** ontico-coalgebrico e $\xleftarrow{\quad}$ il simbolo **dell'invarianza functoriale della verità** (omomorfismo non isomorfo) per l'operazione di

inversione delle frecce e dei morfismi fra componente logica e ontica (fisica/metafisica) del bicondizionale.

- ◆ Similmente, quando passiamo alla **semantica modale**, in quanto “naturalmente” definibile su strutture coalgebriche, l’invarianza funtoriale della verità può essere usata, mediante la nozione di **p-morfismo**, per giustificare **l’equivalenza non-estensionale** fra modelli (mondi possibili) di Kripke – quella che in Logica II avevamo definito “equivalenza secondaria” generata mediante la relazione euclidea e che caratterizza l’assioma **D** del sistema modale **KD45** (Cfr. Logica II, §14.3.1.7, slide 288ss.; e §14.3.2.1 slide 308ss. sull’interpretazione ontica di **KD45**).
- ◆ Il “p-morfismo” è definito anche **morfismo limitato**, proprio perché si limita a modelli di un medesimo livello, degli infiniti possibili ottenibili “annidando uno dentro l’altro” sistemi **KD45** – cfr., insiemisticamente, lo “svolgimento” (*unfolding*) di APG di insiemi non-benfondati illustrato in §5.4.1 – , ottenendo così un numero indefinito di inclusioni di modelli di Kripke che

la sua semantica relazionale consente. Un principio questo che useremo sistematicamente in RN per giustificare le indefinite possibili inclusioni genere-specie di enti.

- ♦ **Il p-morfismo fra modelli di Kripke** in semantica modale così si definisce (Goranko & Otto 2007, p.259):
 - Siano $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ e $\mathfrak{M}' = \langle W', R', V' \rangle$ dei modelli di Kripke, ovvero due strutture (*frame*) definite da due insiemi di mondi possibili $\langle W, W' \rangle$, una relazione di accessibilità fra mondi per ciascuna struttura $\langle R, R' \rangle$ e una funzione di valutazione $\langle V, V' \rangle$ che fa di ciascun mondo un modello, ovvero un dominio di oggetti (stati) su cui interpretarli. Una funzione $\rho : W \rightarrow W'$ è un morfismo limitato da $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{M}'$ se il suo grafo è una **bisimulazione** (omomorfa non isomorfa) fra $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$. Denoteremo il p-morfismo $\rho : \mathfrak{M} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{M}'$, dove l'invarianza della verità così indicata fra i due (se è vero/falso l'uno è vero/falso l'altro) non presuppone qui alcuna inversione della composizione dei morfismi, come fra categorie, trattandosi qui di un solo morfismo (per questo definito anche “morfismo limitato”, *N.d.r.*).

- ◆ È evidente che il soggiacente omomorfismo che giustifica la verità del bi-condizionale ontologico come del connesso p-morfismo non può essere un isomorfismo, e dallo schema di **Figura 7** abbiamo visto che questa condizione può essere soddisfatta solo supponendo strutture algebriche **infinite**. È stato dimostrato che questa condizione di una biiettività non isomorfa fra un'algebra (monomorfismo) e la sua duale, la coalgebra (epimorfismo) può essere garantita definendo la coalgebra sugli insiemi non-benfondati che ammettono inclusioni infinite (Aczel 1988), grazie alle quali è possibile ottenere anche **una dimostrazione di completezza** della semantica relazionale di Kripke in logica modale e delle sue successioni illimitate di inclusioni di modelli (Cfr. (Venema 2007)).
- ◆ Il legame fra teoria degli insiemi non-benfondati e la logica modale consiste nel fatto che esiste **un'intrinseca relazione** fra catene illimitate di inclusioni di insiemi **non-totalmente ordinati** che vengono progressivamente “svolti” (*unfolded*), e l'operatore modale di “possibilità, $\Diamond$ ”.
- ◆ Vuol dire, intuitivamente, che i sottoinsiemi e i loro elementi oggetto di “svolgimento” **non esistono, per l'assioma di fondazione**, “già da qualche

parte”, secondo la presupposizione ontologica platonica soggiacente alla matematica moderna.

- ◆ Invece, in qualche modo vengono “generati” coalgebricamente, ovvero resi **attualmente esistenti** da un operatore modale di “coappartenenza possibile” del sottoinsieme all’insieme che lo include, in simboli: $\langle \ni \rangle$, così, fra l’altro, da dare un senso formale alla nozione tommasiana che gli “effetti esistono in potenza nella causa”, p.es., le specie nel genere.
- ◆ In tal modo, la soddisfazione di certe condizioni che rende **l’attualizzazione (svolgimento) effettiva(o)** e che non sto qui a specificare, fa sì che essa divenga una “coappartenenza necessaria”, ovvero $\neg \langle \neg \ni \rangle$, cioè, $[\ni]$, per noi, l’attualizzazione di una specie come appartenente a un genere.
- ◆ Dove **le parentesi angolari e quadre**, applicate al simbolo di coappartenenza insiemistica “ $\ni$ ”, *duale*, di quello dell’appartenenza insiemistica dell’algebra “ $\in$ ”, sono reminiscenze **dei due operatori di possibilità-necessità “ $\Diamond$ - $\Box$ ”** della logica modale standard, ovvero definita su insiemi standard.

- ◆ Inoltre, essendo gli operatori di co-appartenenza definiti su insiemi non-ben-fondati, tali insiemi sono in grado di **auto-includersi**, sono quindi caratterizzati da una specifica **relazione riflessiva di identità**, $\text{Id}_{\{x\}}$, così da costituire formalmente un **dominio attuale di oggetti** di un predicato, una “classe” dell’ordinario calcolo logico dei predicati, senza riferimenti ad “assiomi di comprensione” concettualisti della logica standard dei predicati (Frege).
- ◆ Dal punto di vista dell’ontologia tomista, ciò significa che nel caso di generazione per co-appartenenza di domini individuali $\{x\}$, la relazione di auto-inclusione consente di formalizzare in TC la nozione ontologica tomista di “ritorno completo su se stesso” (*reditio completa ad semetipsum*) che caratterizza un individuo o **sostanza prima** (la sua “inseità”), in quanto appartenente a (perché generata da) una determinata *specie* o natura.
- ◆ Nel caso di domini a più individui, $\{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$, la relazione di auto-inclusione consente di formalizzare in TC la nozione ontologica di **sostanza seconda**, o *specie*, in quanto appartenente a (perché generata da) un determinato *genere*.

- ◆ Siamo cioè di fronte alla possibilità di giustificare per la prima volta nella modernità un calcolo modale “ontologico” – di fatto uno “svolgimento” (*unfolding*) progressivo di potenzialità attivo-passive, cioè, ontologicamente parlando, **causali**.
- ◆ D'altra parte, la semantica modale standard suppone necessariamente, **una logica del second'ordine**, come di fatto la logica modale viene (veniva) esclusivamente insegnata in tutte le facoltà di filosofia e di informatica.
- ◆ Viceversa, **l'operatore di necessitazione giustificato coalgebricamente** come “svolgimento per co-appartenenze progressive”, implica che esso sia **indicizzato**.
- ◆ Ovvero, **non valga astrattamente per tutti i mondi possibili** – questo è il limite di non usare una semantica del second'ordine –, ma solo **da un certo livello di “svolgimento” in poi**, da quando cioè il dominio di oggetti (mondi) cui si riferisce è stato “svolto” (“venuto all'esistenza attuale”, in termini ontologici).

- ◆ A questo punto, siamo in grado di giustificare pienamente il bicondizionale ontologico di cui abbiamo dato un esempio al termine di §3.1.2: la classe dei cavalli (“esser cavallo”) appartiene alla classe dei mammiferi (“essere mammifero”), *se e solo se* al genere dei mammiferi coappartiene la specie dei cavalli, ovvero:

$$\underbrace{\text{cavallo} \in \text{mammifero}}_{\text{Verità Logica}} \xleftrightarrow{\text{Part. Predic.}} \underbrace{\text{cavallo} \ni \text{mammifero}}_{\text{Verità Ontica}}$$

- ◆ L’omomorfismo fra categorie opposte (funttore: $\leftarrow$) costituisce una formalizzazione della nozione ontologica di **partecipazione predicamentale** (genere-specie/classe-sottoclasse) nella sua doppia componente ontica e logica di cui ogni natura/essenza di ente è costituita.
- ◆ Esso costituisce il fondamento del **bicondizionale onto-logico** ($\Leftrightarrow$) che cerchiamo – nel nostro caso: “per tutti gli x , se x è cavallo, allora x è mammifero è vero se e solo se il genere dei cavalli include la specie dei cavalli” –, che a sua volta è un’interpretazione ontologica della nozione di TC di **morfismo limitato**” (*bounded morphism*: $\xleftrightarrow{\quad}$) fra modelli nella semantica coalgebrica della TC e quindi nella semantica relazionale fra modelli di Kripke in logica modale.

Una nozione fondamentale, come sottolineato da tutti gli autori, perché è il corrispondente nelle **logiche non-standard** del bicondizionale semantico delle logiche standard ($\Leftrightarrow$).

- ◆ Il fatto che si tratti di un morfismo funtorialmente “limitato” è legato alla stratificazione del processo di “svolgimento”, ovvero al fatto **di costituire il limite inferiore di una successione per sé illimitata di inclusioni**.
- ◆ Il che giustifica pienamente lo scopo ultimo del lavoro di Abramsky che stiamo qui commentando, il quale nell’introduzione evidenzia che esso consiste nel dimostrare che, in teoria della computabilità, non si ha a che fare né con oggetti finiti, né con oggetti infiniti – che era il vicolo cieco in cui la logica standard aveva posto la semantica nella modernità –, ma oggetti **finitari** (*finitary*) ovvero come **“limiti di successioni di finiti”**.
- ◆ Ma proprio per questo, conclude Abramsky, in una teoria della computabilità fondata coalgebricamente non si ha a che fare, a livello fondazionale, con nessun **“gioco dell’imitazione” di Turing**.
- ◆ Insomma, proprio come, l’aver abbandonato l’esclusività di logiche del second’ordine in semantica **rende inutile una fondazione concettualista della**

logica (il riferimento all'infinità attuale della mente: per Tommaso questa infinità è solo virtuale, è un “unfolding”), per lo stesso motivo **non c'è bisogno di perseguire alcun mito, prometeico o faustiano a seconda dei pregiudizi, di “intelligenza artificiale” per consentire agli artefatti di calcolare**, anche semanticamente.

- ◆ Il paradigma di universalità del calcolo di Turing basato sul “gioco dell'imitazione” è perfettamente formalizzabile in TC, **ma non viceversa!**
- ◆ Da questo punto di vista, in ontologia formale, la nozione di finitarietà formalizza il principio fondamentale della metafisica della partecipazione tommasiana che **non si dà regresso all'infinito nella gerarchia delle “cause essenziali”**, ovvero delle implicazioni causali che fondano le essenze (generi-specie) dei diversi enti.
- ◆ Un principio che è fondamentale per la dimostrabilità della causa prima (non di Dio in quanto tale), tanto a livello fisico che metafisico.
- ◆ Tutto ciò significa che l'uso sistematico fatto da me nella prima versione semi-formalizzata in logica modale “stratificata” della metafisica e dell'ontologia della partecipazione nel saggio del 2014 pubblicato su *Divus Thomas*, più volte

citato in questo lavoro, ha la sua piena giustificazione formale nella logica della TC e in particolare nella fondazione coalgebrica della logica modale.

5.6.Note

¹ Cfr. L'eccezionale sintesi al riguardo di uno dei più grandi matematici viventi (fra l'altro premio Field nel 1986): M. Atiyah, *Duality in Mathematics and Physics*, lecture notes from the Institut de Matematica de la Universitat de Barcelona (IMUB), 2007.

Scaricabile online all'indirizzo:

http://www.fme.upc.edu/ca/arxiu/butlleti-digital/riemann/071218_conferencia_atiyah-d_article.pdf/view

² Cfr. M. H. Stone, «The theory of representation for Boolean algebras,» *Transactions of the American Mathematical Society*, 40(1936), pp. 37-111.

³ Cfr. A. Kurz & R. Leal, «Modalities in the Stone Age. A Comparison in Coalgebraic Logic», *J. of Theoretical Computer Science*, 430(2012), 88-116.

⁴ Cfr., per esempio, il trattato di SERGIO GALVAN, *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica*, Franco Angeli, Milano, 1991,

di cui ci siamo abbondantemente serviti nei nostri corsi; e il più recente: NINO B. COCCHIARELLA E MAX A. FREUND, *Modal logic. An introduction to its syntax and semantics*, Oxford UP, Oxford UK, 2008, che formalizza la logica modale nei termini della semantica di NGB. Se il primo si muove nell'ottica di un'ontologia **logicista**, il secondo nell'ottica di quella **concettualista**. L'interpretazione coalgebrica completa il quadro nell'ottica di un'ontologia **naturalista** che pone al centro il problema del bi-condizionale ontologico in quanto irriducibile a quello logico, un'ottica che anche Tommaso e Quine avrebbero apprezzato, in quanto ambedue lontanissimi – anche se per motivi diversi – dalle prime due ontologie.

⁵ D. SANGIORGI, “Origins of bisimulation and coinduction”, in D. SANGIORGI & J. RUTTEN, *Advanced topics in bisimulation and coinduction*, Cambridge UP, Cambridge UK, 2012, 1-37.

⁶ Si tratta della voce “Non-wellfounded set theory” curate da L. Moss per la Stanford Encyclopedia of Philosophy, una delle migliori e più aggiornate introduzioni all'argomento: <http://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/>

7

⁸ Cfr. LAWRENCE S. MOSS, «Coalgebraic logic», *Annals of Pure and Applied Logic*, 96 (1999), 277-317, e l'errata corregge per problemi di stampa delle sezz. 6-10 del precedente: ID., «Erratum to “Coalgebraic logic”. [Ann. Pure Appl. Logic 96 (1999) 277-317]», *Annals of Pure and Applied Logic*, 99 (1999), 241-59.

⁹ Per una sintesi in forma manualistica di tutto quanto detto finora in §5.4, e di molto altro ancora che qui non riportiamo, cfr. il fondamentale contributo: YDE VENEMA, «Algebras and co-algebras», in *Handbook of modal logic*, a cura di PATRICK BLACKBURN, FRANK, JOHAN F.A.K. VAN BENTHEM E FRANK WOLTER, Elsevier, Amsterdam, 2007, pp. 331-426. Cfr. anche l'altro manuale, più classico, citato ovunque sull'argomento: PATRICK BLACKBURN, MAARTEN DE RIJKE E YDE VENEMA, *Modal logic. Cambridge tracts in theoretical computer science*, Cambridge UP, Cambridge, UK, 2002.

¹⁰ Cfr. JAN J. M. RUTTEN, «Universal coalgebra: a theory of systems», *Theoretical computer science*, 249 (2000), 3-80.

¹¹ Per queste definizioni, cfr. il recente, ma già classico manuale D. SANGIORGI, *Introduction to bisimulation and coinduction*, Cambridge UP, Cambridge UK, 2012

¹² [3]

