PONTIFICIA UNIVERSITAS
GREGORIANA

ONTOLOGIA FORMALE: DALLA LOGICA ALLA METAFISICA

Schemi ad Uso degli Studenti

Roma 2005

0. Schema del Corso

0.1. BIBLIOGRAFIA GENERALE

0.2. INTRODUZIONE

0.2.1. Sfondo storico: epistemologia e ontologia delle scienze moderne
0.2.2. Logica formale, ontologia formale, ontologia formalizzata
0.2.3. Diversi sensi e funzioni dell'ontologia formale
0.2.4. Definizione di ontologia formale

0.3. ELEMENTI DI LOGICA DELLE PROPOSIZIONI

0.3.1. Cenni di Sintassi
0.3.2. Cenni di Semantica

0.4. ELEMENTI DI LOGICA DEI PREDICATI

0.4.1. Trattazione estensionale *vs.* intensionale dei predicati
0.4.2. Cenni di sintassi
0.4.3. Cenni di semantica
0.4.4. Pregi e limiti della formalizzazione
0.4.5. Conseguenze per l'ontologia formale

0.5. ESTENSIONI MODALI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

0.5.1. Principali modelli di calcolo modale
0.5.2. Principali operatori modali
0.5.3. Logiche aletiche, deontiche, epistemiche

0.6. CENNI DI ONTOLOGIA FORMALE

0.6.1. Diversi sensi dell'essere e teoria della predicazione
0.6.2. Ontologie attualiste e logiche libere
0.6.3. Ontologie possibiliste
0.6.4. Ontologie concettualiste e logiche intensionali

0.6.5. Nesso della predicazione, verità, referenza
0.6.6. Concettualismo naturalista e teoria neo-tomista della predicazione

0.7. ALCUNE APPLICAZIONI

0.7.1. Prima formalizzazione della teoria tomista dell'analogia
0.7.2. Ontologia formale della nozione di persona
0.7.3. Alcuni problemi di ontologia quantistica

1. Bibliografia generale

♦ Testi fondamentali (Cfr. http://www.stoqnet.org/lat/lat_notes.html):

- D. VAN DALEN, *Logic and structure*, Springer, Berlin, 1997. [VD]
- S. GALVAN, *Logica dei predicati*, ISU, Milano, 2004. [GA1]
- S. GALVAN, *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica*, ISU, Milano, 1990. [GA2]
- N.B. COCCHIARELLA, Conceptual realism as a formal ontology. In: Poli R. & Simons P. (Eds.), Kluwer, Dordrecht, 1996, pp. 27-60 (STOQ) [CO]
- N.B. COCCHIARELLA, *Elements of Formal Ontology. Lectures 1-10,* Lateran University, Rome, 2004 (STOQ) [CO1-10].

♦ Testi di riferimento:

- BASTI G., Analogia, ontologia formale e problema dei fondamenti. In: BASTI G & TESTI C.A. (Eds.), *Analogia e autoreferenza*, Marietti *1820*, Genova-Milano, 2004, pp. 159-236. [BA1]
- COCCHIARELLA N.B. Logic and ontology, *Axiomathes* **12**(2001): 117–150. [CO11]

2. INTRODUZIONE

2.1. Sfondo storico: epistemologia e ontologia delle scienze moderne

2.1.1. Oggetto Fenomenico delle Scienze *vs.* Oggetto Ontologico della Filosofia (*FNS cap. 0)*

- → Difficoltà per l'uomo moderno di definire rigorosamente l'oggetto dell'ontologia generale e delle ontologie speciali in riferimento all'oggetto fenomenico delle scienze.

- Centralità della **questione galileiana** nella storia dell'epistemologia moderna: dal concetto **classico di scienza** (*cognitio certa per causas*, relazioni che determinano l'esistenza naturale di enti (sostanze e/o eventi) al concetto **moderno di scienza** (*cognitio certa per leges*, relazioni che determinano l'esistenza logica (predicibilità) di fenomeni (quantità misurabili)).

PONTIFICIA UNIVERSITAS GREGORIANA

2.1.2. La questione galileiana

- Errore iniziale di Galilei: rivendicare il carattere **apodittico (assoluto: verità premesse → validità deduzioni)** delle dimostrazioni della scienza fisico-matematica intesa come ontologia adeguata dell'ente fisico (= essenzialismo neo-platonico *vs*. naturalismo neo-aritotelico). Fisica = **via parallela alla fede** per conoscere il pensiero di Dio ("Dio ha scritto il libro della natura in termini matematici).

- Conflitto con la Chiesa → Bellarmino: carattere **ipotetico (relativo: validità deduzioni indipendente dalla verità premesse)** delle dimostrazioni della scienza fisico-matematica (i medesimi fenomeni possono essere spiegati con differenti ipotesi).

- Questione galileiana: falsa interpretazione delle ipotesi come **"finzioni per salvare i fenomeni"** → reazione dei Galilei con *Il Saggiatore* → processo e condanna di Galilei.

- Rivendicazione del carattere **apodittico** della scienza fisico-matematica moderna post-galileiana:

1. **Essenzialismo:** Cartesio, Leibniz, Spinoza.

→ **Evidenza** come criterio di verità

2. **Fenomenismo:** Newton, Kant.

- → **Trascendentale classico** (essere = fondamento della verità → "enunciato evidente perché vero) *vs.* **trascendentale moderno** (coscienza = fondamento della verità → "enunciato vero perché evidente").

2.1.3. Nascita del metodo ipotetico-deduttivo (*FNS* capp. 3-4)

- Scoperta delle **geometrie non-euclidee** (Lobacevskji) → fine del principio di evidenza come criterio di verità apodittiche → carattere ipotetico delle teorie matematiche → **assiomatizzazione** delle matematiche → matematiche come **teorie formali** (scienza delle relazioni e non delle quantità: Riemann).

«Lobacevskji viene considerato "il Copernico della geometria" come colui che ha rivoluzionato questo campo della matematica creando un'intera branca completamente nuova (…) mostrando **come la geometria euclidea non fosse quella scienza esatta depositaria di verità assolute quale era stata quella precedentemente considerata**. In un certo senso, possiamo affermare che la scoperta della geometria non-euclidea inferse un colpo mortale alla filosofia kantiana, paragonabile alle conseguenze che la scoperta delle grandezze incommensurabili ebbe per il pensiero pitagorico. L'opera di Lobacevskji rese necessario **modificare radicalmente le concezioni fondamentali circa la natura della matematica**» (Boyer 1968, 621s. Corsivi nostri).

- → Nascita del metodo **ipotetico-deduttivo** → teorie matematiche come **sistemi formali** passibili di diverse **interpretazioni** (= **modelli**) nell'uso applicato delle matematiche alle varie scienze (naturali, umane, tecnologiche) in base a diversi **assiomi di misura** mediante cui dare un significato empirico alle teorie formali → controllo empirico delle teorie: **criterio di falsificazione** e non di verificazione delle teorie scientifiche.

  «Di fatto si riconobbe che la validità della deduzione matematica non dipende in alcuna maniera dal particolare significato che può essere associato ai termini o alle espressioni contenute nei postulati. Si vide così che la matematica è molto più astratta e formale di quanto non si supponesse tradizionalmente: più astratta perché, in linea di principio **si possono fare affermazioni matematiche su cose assolutamente qualsiasi**, anziché su insiemi intrinsecamente circoscritti di oggetti o di proprietà di oggetti (le proprietà quantitative, *N.d.R.*), perché la validità delle dimostrazioni matematiche **riposa sulla struttura delle affermazioni, piuttosto che sulla natura particolare del loro contenuto.** (…) Ripetiamo che l'unica questione riguardante il matematico puro (in quanto distinto dallo scienziato che usa la matematica per studiare un oggetto particolare) non è se i postulati che egli ammette o le conclusioni che egli trae dai primi sono veri, ma se le conclusioni avanzate siano, di fatto, **le conclusioni logiche necessarie** delle ipotesi da cui è partito (…). Fintantoché abbiamo a che fare col compito essenzialmente matematico di esplorare le relazioni puramente logiche di dipendenza tra le varie affermazioni, i significati familiari dei termini primitivi (i termini con cui sono costruiti gli assiomi di partenza, *N.d.R.*) devono essere ignorati e gli unici "significati" associati ad essi sono quelli assegnati dagli assiomi in cui entrano. Questo è il significato del famoso epigramma di Russell: la matematica pura è quella scienza in cui non sappiamo di cosa stiamo parlando o se ciò che stiamo dicendo è vero (Nagel & Newman 1993, 23s.).

2.2. Logica formale, ontologia formale, ontologia formalizzata

2.2.1. Dalla Logica Formale all'Ontologia

- Lo sviluppo della logica e dell'epistemologia delle scienze moderne → progressiva separazione della **forma** dal **contenuto extra-linguistico** delle espressioni linguistiche → sviluppo di una logica e di un'epistemolgia inadeguate a svariati usi del linguaggio in forme non-scientifiche di comunicazione fra soggetti umani →
- → **Reazione della scuola fenomenologica:** carattere intenzionale (sempre legato a un contenuto) di ogni atto di pensiero e/o di ogni espressione linguistica significativa → contrapposizione fra **logica formale** e **logica materiale** o "logica dei contenuti" (*Inhaltlogik*) (Brentano, Husserl).
- → **Reazione della scuola semiotica:** L'analisi logica o metalinguistica di un linguaggio inteso come insieme di segni dotati di senso, può essere effettuata considerando **tre classi di relazioni** che le varie parti (parole, frasi, discorsi, etc.) possono avere:

  1. **Con il mittente o con il ricevente** di una comunicazione linguistica

2. **Con altre parti del linguaggio**

3. **Con gli oggetti** linguistici o extra–linguistici cui le parti del linguaggio si riferiscono

- Tripartizione della semiotica e della logica [C.W. Morris (1901-1979)]

1. **Pragmatica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni con gli agenti della comunicazione ed alla capacità del linguaggio di modificare i comportamenti (p.es., pubblicità, retorica,etc.). → **Pragmatismo:** se utilità pratica **unico criterio** validità enunciati scientifici [C.S. Peirce (1839-1914)].

2. **Sintattica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni linguistici fra di loro prescindendo sia dai contenuti che dagli agenti della comunicazione. **Sintattica o Logica formale:** parte della logica che studia la sintassi dei linguaggi. → **Formalismo**: se coerenza formale **unico criterio** validità enunciati scientifici [D. Hilbert (1862-1943)].

3. **Semantica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni con i loro oggetti intra– o extra–linguistici (= referenti). **Semantica o Logica**

materiale o Logica dei contenuti: parte della logica che studia la semantica dei linguaggi. → **Realismo:** se verità (adeguazione all'oggetto) dei linguaggi scientifici considerata fondamento della loro stessa coerenza formale.

- Quando nell'analisi logica dei linguaggi si tiene conto simultaneamente di tutte e tre le classi di relazioni che determinano la forma delle espressioni e delle argomentazioni corrette all'interno di ciascun linguaggio, non siamo più nell'ambito della logica formale (che si limita al solo studio sintattico e semantico), ma della **ontologia formale** → assenza della consapevolezza di questa distinzione nella logica classica prescientifica (p.es., aristotelica o scolastica).

- Riferimento dell'ontologia alla pragmatica deriva dal fatto che ogni linguaggio in quanto **sistema di rappresentazioni** è **ontologicamente neutro:** analisi logico-semantica sulla **verità** degli enunciati (*sentences*), sulla loro **soddisfacibilità** e sulla loro **referenza** ad oggetti è analisi che permane a livello squisitamente **linguistico** → riferimento all'ente extra-linguistico (mentale, fisico…) non può trascendere il livello dell'**ipotesi**, come già Kant si accorse con la sua teoria dell'essere come **noumeno** rispetto ad un intelletto "rappresentazionale".

- Riferimento all'ente ha senso solo quando dal piano delle rappresentazioni si passa a quello delle **azioni,** come già Aristotele per primo si accorse con la sua teoria dell'unità fra atto e oggetto intellettivo, nella sua teoria dell'intelletto come "atto".
- → Linguaggio da sistema di rappresentazioni viene inteso come un insieme di **atti linguistici** di soggetti in relazione **attiva-passiva** (causale) fra di loro (comunicazione) e con oggetti del mondo (conoscenza). In questo senso il problema della referenza e della denotazione extra-linguistica degli **asserti** (*statements*) non può prescindere dalla dimensione **prammatica** del linguaggio (ontologia).
- In questo senso ogni linguaggio in quanto usato da una comunità linguistica è implicitamente un'ontologia → ogni comunità linguistica condivide oltre che determinate **categorie logico-grammaticali** del proprio linguaggio, anche determinate **categorie ontologiche** → senso del termine **ontologia** nelle analisi linguistiche della **scienza delle comunicazioni** e dell'**informatica.**
- → L'ontologia implicita può essere resa esplicita in una determinata filosofia ovvero in una vera e propria **teoria ontologica** (p.es., le diverse metafisiche nelle diverse culture o la metafisica stessa in quanto scienza). In quanto tale le teorie ontologiche sono e-

spresse nei **linguaggi naturali** di cui sono in qualche modo primariamente costituite e possono essere oggetto di **analisi logica** sintattica e semantica come qualsiasi altra teoria.

- E' questo il senso del termine moderno di **ontologia formale** usato per la prima volta da Husserl nel senso di un'analisi secondo il **metodo fenomenologico** dell'epoché dei fondamenti della logica dal p.d.v. della soggettività trascendentale → analisi dell'atto di coscienza pre-rappresentazionale in quanto costitutivo dei contenuti della coscienza rappresentazionale. Tentativo di un'interpretazione realista dell'analisi ad opera di M. Scheler, J. Seifert, K. Woityla…
- Tentativo più significativo del XX secolo in campo scientifico (scienze cognitive) delle sviluppo di un'epistemologia realista che interpreta la conoscenza come **azione interiorizzata** è quello ad opera **dell'epistemologia e psicologia genetiche** ad opera di J. Piaget.
- L'analisi metalogica della sintassi e della semantica di una determinata ontologia può essere operata anche secondo i canoni della logica scientifica moderna → passaggio dal linguaggio naturale (**LN**) al linguaggio simbolico (**LS**) e quindi al linguaggio formaliz-

zato della logica dei predicati (**L**) e del calcolo dei predicati (**C**) → ontologia formale nel senso dell'**ontologia formalizzata.** E' questo il senso in cui useremo noi la dizione "ontologia formale".

2.3. Diversi sensi e funzioni dell'ontologia formale

- Naturalmente l'esigenza di un'ontologia formale (il termine è di H. C. Wolff) è tipicamente **moderna**, legata alla rivisitazione leibniziana della logica in termini di *charachteristica universalis,* ovvero di:

   1. un universale **linguaggio simbolico** (*ars combinatoria*)
   2. un universale e completo **sistema di deduzione** (*calculus ratiocinator*)

- Applicabile sia al linguaggio matematico delle "nuove scienze" sia a quello ordinario della filosofia e della metafisica in particolare con una triplice funzione:

   1. Fornire un linguaggio **unico** e **univoco** perché simbolico a tutte le scienze per il dialogo interdisciplinare.

2. Fornire un linguaggio simbolico ed una **metodologia logica** per formalizzare le diverse ontologie del senso e del linguaggio comune.

- Questa impostazione "profetica" dell'ontologia formale in senso leibniziano è quanto oggi — grazie a tre secoli di ininterrotti progressi della logica e del calcolo formali — si può e si deve realizzare in una **cultura globale** come la nostra.

2.4. Definizione di ontologia formale

- «Un'ontologia formale è sia una teoria espressa in forma logica sia una teoria della struttura metafisica del mondo. Ciò che ne fa una teoria espressa in forma logica è il fatto che le differenti categorie ontologiche o modi di essere sono rappresentate in esse da differenti categorie logico-grammaticali» [CO, 1-2]. → Ontologia formale, costituita da:
    - o **Grammatica ontologica**: ciò che determina come le diverse espressioni di queste categorie logico-grammaticali possono essere combinate per rappresentare aspetti ontologici diversi del mondo.

- **Leggi ontologiche:** che determinano le formule valide di quella grammatica, cioè come le espressioni delle diverse categorie logico-grammaticali di una data ontologia possono essere deduttivamente trasformate.

- Per ambedue queste funzioni, centralità della questione di come **il nesso della predicazione** viene interpretato nel sistema metafisico che una data ontologia formale rappresenta ← nesso della predicazione determina come le espressioni delle categorie logico-grammaticali di una teoria formalizzata possono essere validamente combinate e trasformate deduttivamente.

- 3 principali teorie della predicazione nella storia ↔ tre teorie degli universali (? classi o insiemi =ciò che può essere predicato di un nome: Aristotele, *De Interpretatione*, 17a39):
  - **Nominalismo:** universali predicabili si riducono alle espressioni predicative di un dato linguaggio che *sono vere* di quelle cose di cui sono predicate (↔ quelle cose *soddisfano* quelle espressioni).

- **Concettualismo:** universali predicabili sono espressioni di *concetti mentali* che determinano *verità/falsità* delle corrispondenti espressioni predicative.
- **Realismo:** universali predicabili sono espressioni di *proprietà e relazioni* che esistono indipendentemente dalle capacità linguistiche o mentali:
  - **Nel mondo logico** → realismo **logicista** (Platone, Frege)
  - **Nel mondo fisico** → realismo **naturalista** di due tipi:
    - **Atomismo:** senza generi naturali (Democrito, Wittengstein)
    - **Essenzialismo:** con generi naturali (Aristotele, Cocchiarella)

- Ogni forma di naturalismo suppone tuttavia una qualche forma di concettualismo perché né proprietà e relazioni naturali possono essere "i significati" o le intensioni delle corrispondenti espressioni predicative ma solo mediante i relativi concetti → problema della relazione fra concetti e proprietà e relazioni naturali che essi "significano".

3. ELEMENTI DI LOGICA DELLE PROPOSIZIONI [GA2, 13-64]

3.1. Cenni di sintassi

3.1.1. Linguaggi ordinari, simbolici, formali

- Ogni teoria scientifica (scienze naturali, matematiche, metafisiche) si presenta come un sistema di deduzioni valide, a partire da un insieme di assiomi (formule a zero premesse) e di regole di deduzione.
- Distinzione fra l'analisi grammaticale dei linguaggi ordinari e l'analisi logica dei linguaggi simbolici: distinzione fra **periodo/proposizione** *vs.* distinzione **proposizione semplice (categorica, atomica)/proposizione complessa** → = **formule** → distinzione fra formule del **linguaggio-oggetto** (= linguaggio simbolizzato della teoria oggetto dell'analisi) e formule del **metalinguaggio** (= linguaggio simbolizzato della teoria logica mediante cui si effettua l'analisi, generalmente quello della **teoria degli insiemi**).

- Nell’analisi logica ogni teoria o insieme di formule considerata come un sistema formale che sintatticamente significa un calcolo **CA** costituito da un linguaggio **L** e da un insieme di regole deduttive **D → CA = <L,D>**. **L** costituito da una alfabeto **A** e regole di formazione **F → L=<A,F>.**
- Il metalinguaggio in cui è costituito **CA** e dimostrati i metateoremi che riguardano le proprietà di **CA** è anch’esso un calcolo metateorico, con un suo linguaggio, un suo insieme di regole, un suo alfabeto.
- Il metalinguaggio della logica delle proposizioni è il calcolo proposizionale classico **k = <Lk,Dk>** con **L=<Ak,Fk>** (= cosiddetto calcolo dei sequenti di Gentzen: cate-ne dimostrative come sequenza di formule).
- **Ak** di **k** costituito dai seguenti segni (teorici e metateorici)

Linguaggio	**Metalinguaggio**
a. Variabili proposizionali: *p,q,r,…*	**a. Metavariabili proposizionali:** $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$
b. Costanti proposizionali: Ø,Ù,Ú,®, «	**b. Metacostanti proposizionali:** *non*,€:=(*et*,*vel*,⇒,⇔) *om*,*ex*
c. Segni ausiliari: (,)	**c. Segni ausiliari:** (,)

- L'insieme {**Fk**} delle regole di formazione di formule che appartengono all'insieme *X* delle formule ammissibili in **k** è costituito dalle clausole della seguente **definizione induttiva** delle formule per **k,** a partire da formule atomiche (base) verso formule molecolari (passo):

  i. *p,q,r,…*sono formule (atomiche)

  ii. se α è una formula allora $\neg\alpha$ è una formula

iii. se α,β sono formule, allora ogni $\alpha\Subset\beta$ è una formula

iv. non ci sono altre formule
(le clausole ii-iv riguardano le formule molecolari di **k**)

- **Sequenza derivabile** "$X\vdash\alpha$"**:** sequenza di formule costituito da una formula sulla destra (consequente) e da un insieme (non ordinato) di formule X (anche infinito: antecedente) sulla sinistra del segno di derivazione "$\vdash$", ottenuta mediante l'applicazione di una delle insieme delle regole di derivazione {**Dk**}**.**
  - **Ordine delle assunzioni** nell'antecedente non è rilevante
  - **Ripetizione delle assunzioni** non è rilevante → vanno eliminate
  - Antecedenti di certe sequenze possono essere costruiti attraverso **operazioni insiemistiche** (p.es.: $X\cup Y$) → antecedente $X\alpha$ sta per $X\cup\{\alpha\}$come pure antecedente α in $\alpha\vdash\beta$ sta per $\{\alpha\}\vdash\beta$.

PONTIFICIA UNIVERSITAS GREGORIANA

3.1.2. Regole primitive di derivazione

1. Assunzione a zero premesse (**A**)

$$X \vdash \alpha \text{ (se } \alpha \in X\text{)}$$

Caso notevole: $\alpha \vdash \alpha$.

Tutti gli assiomi di una teoria sono assunzioni a zero premesse.

2. Introduzione congiunzione nel conseguente (**I**$\wedge$)

$$\frac{X \vdash \alpha \qquad Y \vdash \beta}{X \cup Y \vdash \alpha \wedge \beta}$$

3. Eliminazione della congiunzione nel conseguente (**E**$\wedge$)

$$\frac{X \vdash \alpha \wedge \beta}{X \vdash \alpha / \beta}$$

4. Introduzione della disgiunzione nel conseguente (**I**$\vee$)

$$\frac{X \vdash \alpha}{X \vdash \alpha \vee \beta / \beta \vee \alpha}$$

5. Introduzione della disgiunzione nell'antecedente ($\vee$**I**)

$$\frac{X\alpha \vdash \gamma \qquad Y\beta \vdash \gamma}{X \cup Y \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$$

6. Introduzione dell'implicazione nel conseguente (**I**$\rightarrow$)

$$\frac{X\alpha \vdash \beta}{X \vdash \alpha \rightarrow \beta}$$

7. Modus Ponens (**MP**)

$$\frac{X \vdash \alpha \qquad Y \vdash \alpha \rightarrow \beta}{X \cup Y \vdash \beta}$$

8. Negazione classica ($\neg$**k**)

$$\frac{X\neg\alpha \vdash \beta \qquad Y\neg\alpha \vdash \neg\beta}{X \cup Y \vdash \alpha}$$

Formalizzazione della classica argomentazione per assurdo perché ammette che, se un certo insieme ($X \cup Y$) di premesse che nega una certa conclusione (cioè: $\neg\alpha$) porta a contraddizione ($\beta \wedge \neg\beta$), allora vale α.

3.1.3. Teorema di finitezza sintattica per il calcolo (k)

$$X \vdash \alpha \Rightarrow (exZ)(F(Z)\ et\ Z \subseteq X\ et\ Z \vdash \alpha$$

Se α è derivabile da X, allora esiste un sottoinsieme finito proprio o improprio di X tale che da esso è derivabile α. Infatti, o la derivazione prende le mosse da **A** ($X \vdash \alpha$, $\alpha \vdash \alpha$) o comunque da derivazioni con un numero finito di premesse, cosicché anche iterando si hanno comunque insiemi finiti di formule. Pertanto anche nell'ultima derivazione si avrà un numero finito di premesse.

Teorema importante perché se è vero che le nozioni sintattiche sono finitarie, mentre quelle semantiche non lo sono, tuttavia quando il calcolo è completo, la nozione infinitaria di conseguenza logica (semantica) è interscambiabile con quella finitaria di derivazione (sintattica).

3.1.4. Regole derivabili di (k)

- Ottenute per riduzione di successive applicazioni di regole primitive, assumendo le premesse come ipotesi (H).

1. Rafforzamento delle premesse (**RP**)

$$\frac{X \vdash \beta}{X\alpha \vdash \beta}$$

Derivazione:

$X \vdash \beta$	H
$\alpha \vdash \alpha$	A
$X\alpha \vdash \beta \wedge \alpha$	I$\wedge$

$X\alpha\vdash\beta$	$E\wedge$

2. Concatenazione (**KS**)

$$\frac{X\vdash\alpha \qquad Y\alpha\vdash\beta}{X\cup Y\vdash\beta}$$

Derivazione:

$Y\alpha\vdash\beta$	H
$Y\vdash\alpha\rightarrow\beta$	$I\rightarrow$
$X\vdash\alpha$	H
$X\cup Y\vdash\beta$	MP

3. Negazione intuizionistica (Regola dello Pseudo Scoto) ($\neg$**i**)

$$\frac{X \vdash \alpha \qquad Y \vdash \neg\alpha}{X \cup Y \vdash \beta}$$

Derivazione:

$X \vdash \alpha$	H
$X \neg\beta \vdash \alpha$	RP
$Y \neg\beta \vdash \neg\alpha$	H
$X \cup Y \vdash \beta$	$\neg$**k**

Calcolo intuizionistico si ottiene da **k** sostituendo $\neg$**k** con $\neg$**i** e aggiungendovi la regola $\neg$**j.** Mentre, se si sostituisce $\neg$**k** con la sola $\neg$**j** si ottiene il calcolo minimale. L'importanza della regola $\neg$**i** è conosciuta fina dal ME come regola dello Pseudo Scoto, *ex contradictione sequitur quodlibet.* → Logiche dialettiche che ammettono la contraddizione devono negare questa regola, pena la loro completa banalizzazione → = logiche non scotiane.

4. Doppia negazione classica (**DN₁**)

$$\frac{X \vdash \neg\neg\alpha}{X \vdash \alpha}$$

Derivazione:

$X \vdash \neg\neg\alpha$	H
$X\neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	RP
$\neg\alpha \vdash \neg\alpha$	A
$X \vdash \alpha$	$\neg$**k**

Dalla negazione di una formula negata è derivabile la formula non negata.

5. Negazione minimale ($\neg$**j**)

$$\frac{\begin{array}{c} X\alpha \vdash \beta \\ Y\alpha \vdash \neg\beta \end{array}}{X \cup Y \vdash \neg\alpha}$$

Derivazione:

$X\alpha \vdash \beta$	H
$\neg\neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	A
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	DN_1
$Y\alpha \vdash \neg\beta$	H
$\neg\neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha$	A
$\neg\neg\alpha \vdash \alpha$	DN_1
$Y\neg\neg\alpha \vdash \neg\beta$	KS

PONTIFICIA UNIVERSITAS GREGORIANA

$X \cup Y \vdash \neg\alpha$ $\neg\mathbf{k}$

Assunta una proposizione che porta a contraddizione, tale proposizione va negata. → Calcolo intuizionistico estensione (con $\neg\mathbf{i}$ come ulteriore primitivo) del calcolo minimale. D'altra parte sia calcolo intuizionistico che minimale inclusi nel calcolo classico, poiché le altre due regole di negazione derivabili in $\neg\mathbf{k}$.

6. Contrapposizione (**C**)

$$\frac{X\alpha \vdash \beta}{X\neg\beta \vdash \neg\alpha}$$

Derivazione:

$X\alpha \vdash \beta$	H
$\neg\beta \vdash \neg\beta$	A
$\alpha\neg\beta \vdash \neg\beta$	RP
$X\neg\beta \vdash \neg\alpha$	$\neg\mathbf{j}$

Se una proposizione è condizione necessaria per un'altra, il non valere della condizione necessaria implica il non valere dell'altra.

7. Esaustione (**E**)

$$\frac{X\alpha \vdash \beta \qquad Y\neg\alpha \vdash \beta}{X \cup Y \vdash \beta}$$

Derivazione:

$X\alpha \vdash \beta$	H
$X\neg\beta \vdash \neg\alpha$	C
$Y\neg\alpha \vdash \beta$	H
$Y\neg\beta \vdash \neg\neg\alpha$	C
$X \cup Y \vdash \beta$	$\neg$**k**

E assomiglia soltanto alla regola primitiva ¬**k** del calcolo **k**. La formula derivata nella conclusione infatti è affermata non perché la contraddizione era nelle formule derivate come nella regola ¬**k,** ma nelle premesse. Per arrivare alla conclusione occorreva dunque spostare la contraddizione alle formule derivate nelle premesse, cosa che si è ottenuta mediante la doppia applicazione della regola di contrapposizione **C** alle due premesse.

8. Principio del terzo escluso (**TE**)

$$\vdash \alpha \vee \neg\alpha$$

Derivazione:

$\alpha \vdash \alpha$	A
$\alpha \vdash \alpha \vee \neg\alpha$	I$\vee$
$\neg\alpha \vdash \neg\alpha$	A
$\neg\alpha \vdash \alpha \vee \neg\alpha$	I$\vee$
$\vdash \alpha \vee \neg\alpha$	E

TE, E e $\neg$**k** sono strettamente connesse. Infatti, per derivare **TE** è indispensabile **E** che a sua volta suppone $\neg$**k**.

9. Principio di non contraddizione (**NC**)

$$\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$$

Derivazione:

$\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg\alpha \wedge \neg\alpha$	A
$\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \neg\alpha$	E$\wedge$
$\alpha \wedge \neg\alpha \vdash \alpha$	E$\wedge$
$\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	$\neg$**j**

Il fatto che **NC** sia ottenuto solo dalla regola di negazione minimale $\neg$**j,** mostra che è una regola derivabile in tutti i calcoli proposizionali (classico, intuizionistico e minimale). Ed è una prova che **TE** e **NC** non sono equivalenti.
E' notevole inoltre il fatto che **TE** e **NC** siano formule derivabili a partire da un insieme vuoto di assunzioni, così da giustificare il fatto che siano "principi". Ciò

significa che sebbene siano regole sintattiche dei rispettivi calcoli — **NC** di **k, i, j**, **TE** del solo **k** — pur tuttavia, da esse non possa essere derivato alcunché, non possono cioè essere poste come premesse in alcuna derivazione di regole. Una proprietà questa ben nota anche agli antichi che per questo li definivano “principi primi”.

3.2. Cenni di semantica

- Semantica s’interessa delle relazioni fra linguaggio e ciò di cui il linguaggio parla → nozione di **interpretazione** mediante cui si attribuisce a ogni variabile proposizionale una **valore di verità** = dire se lo stato di cose espresso da quella variabile è realizzato o meno → si attribuisce a quella variabile il valore 1 o 0.

3.2.1. Definizioni preliminari

1. Interpretazione (I)
   V sia l’insieme delle variabili proposizionali di **k**:

$$I:V\rightarrow\{0,1\}$$

I è una funzione che associa ad ogni variabile: *p*, *q*, *r*,…un valore di verità: *I*(*p*)=1, *I*(*q*)=0, *I*(*r*)=1, … è un'interpretazione.

- Proprietà di **vero-funzionalità** dei connettivi logici ¬*p*, *p*€*q*: è possibile assegnare univocamente un valore di verità a ciascuna delle proposizioni composte a partire dai soli valori di verità delle proposizioni atomiche componenti, in base alle seguenti **tavole di verità** dei connettivi logici:

¬	
0	1
1	0

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

∨	0	1
0	0	1
1	1	1

→	0	1
0	1	1
1	0	1

↔	0	1
0	1	0
1	0	1

- Le tavole si leggono nel modo seguente: il primo argomento è preso dalla colonna all'estrema sinistra e il secondo argomento dalla prima riga.

- Una proposizione composta è detta una **tautologia** o **legge logica** se acquisterà valore 1 per qualsiasi valore di verità sia assegnato alle proposizioni atomiche componenti (ovvero, per qualsiasi interpretazione delle variabili).

2. Formula vera ($I \vDash \alpha$)

Dove ($I \vDash \alpha$) è da leggersi come: "α è vera in I", "I è modello di α", "I rende vera α".

Definizione induttiva di formula vera usando il simbolo "$\equiv$" (coincide) come segno dell'identità notazionale. → "$\alpha \equiv p$" sta per "α è (coincide con) p".

i. $\alpha \equiv p$

$I \vDash p \Leftrightarrow I\,(p) = 1$

ii. $\alpha \equiv \neg\beta$

$I \vDash \neg\beta \Leftrightarrow \textit{non}\ I \vDash \beta$

$\Leftrightarrow I \nvDash \beta$

iii. $\alpha \equiv \beta \text{€} \gamma$

$I \vDash \beta \text{€} \gamma \Leftrightarrow I \vDash \beta \text{ €} I \vDash \gamma$

3. Verità di un insieme di formule ($I \vDash \mathrm{X}$)

   $I \vDash \mathrm{X} \Leftrightarrow (\mathit{om}\ \alpha \in \mathrm{X})\ (I \vDash \alpha)$

   I è modello di X se e solo se è modello di tutte le formule appartenenti a X.

4. Soddisfacibilità di una formula (*Sod* α)