GIANFRANCO BASTI

INTRODUZIONE ALLA LOGICA DEONTICA

Parte III:
Elementi di Logica dei Predicati, delle Classi e delle Relazioni

Schemi ad Uso degli Studenti

Roma 2008

3. Logica dei Predicati

3.1. Dalla Logica delle Proposizioni alla Logica dei Predicati [BO, cap. VII]

- La logica delle proposizioni costituisce solo la **parte elementare** della logica deduttiva, ma non può esaurire tutte le forme **valide** di dimostrazione.
- Ad esempio, se traducessimo in termini di logica proposizionale lo schema fondamentale del **sillogismo,** il semplice *Barbara*:

Se ogni M è P
ed ogni S é M
allora ogni S è P

Otterremmo la formula <$(p \wedge q) \rightarrow r$> che non è una **legge logica**: infatti per $p/1$, $q/1$, $r/0$ risulterebbe **falsificata**.

- L’errore è che la formula del *Barbara* è una formula di **logica dei termini** non di **logica delle proposizioni**. *M*, *S* e *P* sono variabili **terminali**, non proposizionali.

- Generalmente, la **logica dei termini** si suddivide in:
  1. **Logica dei predicati**
  2. **Logica delle classi**
  3. **Logica delle relazioni**

- Nella logica dei predicati, infatti, non consideriamo più, nello studio delle argomentazioni valide, le proposizioni semplici come altrettante **“scatole nere”,** ma ci interessiamo della loro costituzione **interna**. P.es., il sillogismo e una metodologia d’inferenza deduttiva per connettere in modo valido **soggetto e predicato** nella conclusione a partire dalle connessioni fra soggetto e predicato nelle due premesse (maggiore e minore).

- Così, nella logica dei predicati i due componenti fondamentali non sono variabili proposizionali e predicati (costanti) proposizionali, ma **variabili terminali** (*x*,*y*,*z*,*w*,…) che denotano oggetti individuali generici (in **LN:** “qualcosa”, “qualcuno”), **costanti terminali** (*a*,*b*,*c*,…) che rappresentano nomi di oggetti singoli determinati (corrispondenti in **LN,** p.es., a nomi propri nel caso di viventi, denotazioni di oggetti singoli anche inanimati: “quell’auto”, “quella casa”, etc.) e **predicati (costanti predicative) terminali** (P, Q, R,…) a 1,2,3,…,n **argomenti**.

- Per poter simbolizzare **proposizioni universali generiche,** dove cioè gli argomenti dei predicati sono **variabili terminali** (che denotano oggetti individuali generici e non individui singoli) abbiamo bisogno di **due quantificatori**:
  1. **Quantificatore universale,** $\forall$, “per ogni” → $\forall x\ Px$: “per ogni x che è P”
  2. **Quantificatore esistenziale,** $\exists$, “esiste almeno un” → $\exists x\ Px$ “esiste almeno un x che è P”

- Come sappiamo, le formule quantificate possono essere considerate come **proposizioni** e non come semplici **funzioni proposizionali** perché ad esse possono essere assegnati **valori di verità**. Infatti, malgrado nella formula sono presenti dei segni di variabili, esse sono **vincolate dai quantificatori**, quindi non si tratta propriamente di variabili.

- → Possibilità di connettere formule vincolate dai quantificatori mediante i **connettivi logici** del calcolo proposizionale → **formule complesse del calcolo dei predicati C.**

3.2. Cenni di sintassi

- Il linguaggio **L** della logica dei predicati è costituito da un alfabeto **A** e regole di formazione **F** → **L=<A,F>.**

3.2.1. Alfabeto

- Sintetizzando quanto detto finora, abbiamo quattro categorie di segni:

1. **Variabili individuali:** x, y, z, … con eventuali indici sottoscritti. Talvolta questi segni sono presi anche come segni metateorici di variabili.
2. **Costanti individuali:** a,b,c, …. che rappresentano nomi di oggetti singoli
3. **Costanti Predicative:**

$$P_1^1 \; P_2^1 \; P_3^1 \cdots$$
$$P_1^2 \; P_2^2 \; P_3^2 \cdots$$
$$P_1^3 \; P_2^3 \; P_3^3 \cdots$$

Dove P è un segno per una proprietà o relazione e, in generale P_k^n è la *k*-esima costante predicativa ad *n* argomenti (*n*-adica) che indica una relazione fra *n* individui.

4. **Segni logici:**
   a. *Connettivi logici*: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
   b. *Quantificatori:* $\exists$, $\forall$
   c. *Segni ausiliari:* (,)

Alfabeto di C

Linguaggio	**Metalinguaggio**
a. Variabili terminali: x,y,z…	**a. Metavariabili terminali:** α,β,γ,…
b. Costanti terminali: a,b,c,…	**b. Metacostanti terminali:** μ,ν,ο,...
c. Costanti predicative: $P_1^1\ P_2^1\ P_3^1 \cdots$ $P_1^2\ P_2^2\ P_3^2 \cdots$ $P_1^3\ P_2^3\ P_3^3 \cdots$	**c. Metacostanti predicative:** $\varphi_1^1\ \varphi_2^1\ \varphi_3^1 \cdots$ $\varphi_1^2\ \varphi_2^2\ \varphi_3^2 \cdots$ $\varphi_1^3\ \varphi_2^3\ \varphi_3^3 \cdots$
d. Quantificatori ∃**,** ∀	**d. Metaquantificatori:** ***ex, om***
c. Costanti proposizionali: non: ¬ (~) [NEGAZIONE]	**b. Metacostanti proposizionali:** non

e: $\wedge$ ($\cdot$) [CONGIUNZIONE] o: $\vee$ [DISGIUNZIONE] se…allora: $\rightarrow$ ($\supset$) [IMPLICAZIONE MATERIALE] se e solo se: $\leftrightarrow$ ($\equiv$) [EQUIVALENZA]	et vel $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$
c. Segni ausiliari: (,)	**c. Segni ausiliari:** (,)

3.2.2. Regole di formazione

- **FF: Regole di formazione delle formule** α: coincidono con le clausole della definizione induttiva di formula:
  Base: $P_k^n\left(x_1 \ldots x_n\right)$ è una formula elementare

  Passo: a) formule molecolari; **b)** formule quantificate

  a) $\neg\alpha$ è una formula; $\alpha\wedge\beta$, $\alpha\vee\beta$, $\alpha\rightarrow\beta$, $\alpha\leftrightarrow\beta$ sono formula.

  b) $\forall x\alpha$ è una formula; $\exists x\alpha$ è una formula; nient'altro è una formula.

3.3. Cenni di semantica

3.3.1. Regole di quantificazione

- La funzione dei quantificatori è essenzialmente quella di definire **il dominio di soddisfacibilità di un determinato predicato** (qual' è la collezione di elementi che **rende vero** un predicato) **,** nel caso di proposizioni predicative **universali**, ovvero che non sono vere solo per uno o più singoli individui concreti (denotati da una costante terminale, *a*, *b*), ma per **alcuni** (quantificatore esistenziale o particolare, $\exists$) o **tutti** (quantificatore universale $\forall$) gli individui generici (denotati da una variabile terminale, *x*, *y*) di una certa collezione (classe o insieme in logica, genere (specie) in ontologia).
- Quattro sono le **regole di quantificazione** per trasformare proposizioni **atomiche** del calcolo dei predicati (p.es., «l'uomo è mortale») in proposizioni **molecolari** del calcolo delle proposizioni (p.es., «per ogni *x*, se *x* è uomo, allora *x* è mortale») cui applicare le **regole d'inferenza** relative alle **leggi logiche** del calcolo delle proposizioni per dimostrazioni formali di validità:
  1. om$\alpha\ \varphi\alpha \Rightarrow \varphi\nu$: **Esemplificazione Universale (EU)**

2. $\varphi\beta \Rightarrow \text{om}\alpha\ \varphi\alpha$: **Generalizzazione Universale (GU)**

3. $\text{ex}\alpha\ \varphi\alpha \Rightarrow \varphi\nu$: **Esemplificazione Esistenziale (EE)** [per $\nu \neq \beta$ e senza occorrenze precedenti]

4. $\varphi\nu \Rightarrow \text{ex}\alpha\ \varphi\alpha$: **Generalizzazione Esistenziale (GE)**

dove ν è un qualsiasi simbolo individuale e β denota un individuo scelto arbitrariamente.

→ Es.(1): $<\forall x\, Ux \rightarrow Mx \Rightarrow Ua \rightarrow Ma>$ per EU («Se ogni uomo è mortale, allora è vero che, se Antonio è uomo, allora Antonio è mortale»).

→ Es.(2): $<Uy \rightarrow My \Rightarrow \forall x\, Ux \rightarrow Mx>$ per GU («Se un qualsiasi uomo è mortale allora è vero che ogni uomo è mortale»).

→ Es. (3): $<\exists x\, Ux \wedge Vx \Rightarrow Ua \wedge Va>$ per EE («Se esistono degli uomini viziosi, allora è vero che alcuni uomini sono viziosi»).

→Es. (4): $<Pa \Rightarrow \exists x\ Px>$ per GE («Se io penso, allora è vero che esiste qualcosa che pensa»).

- Abbiamo inoltre due **equivalenze** per definire l'uso di quantificatori e consentire la verifica degli argomenti che li utilizzano, posto che essi sono validi *se e solo se* sono validi qualunque sia il numero degli individui esistenti, supposto che ne esista almeno uno.

1. $\forall x\, Px \equiv \left(Pa \wedge Pb \wedge Pc \wedge \ldots \wedge Pn\right)$, per il **quantificatore universale**

2. $\exists x\, \phi x \equiv \left(\phi a \vee \phi b \vee \phi c \vee \ldots \vee \phi n\right)$, per il **quantificatore esistenziale**

→ La verifica consisterà allora in tentativi di invalidare l'argomento per **modelli** (mondi possibili) che contengano 1, 2,…*n* individui.

→ P. es., l'argomento $\left\langle \left[\left(\forall x\, Cx \to Ax\right) \wedge \left(\exists x\, Cx \cdot Gx\right)\right] \to \left(\forall x\, Gx \supset Ax\right)\right\rangle$ (Tutti i *collie* sono affettuosi, alcuni *collie* sono cani da guardia, quindi tutti i cani da guardia sono affettuosi) è valido per un modello ad un solo individuo — infatti $\left\langle \left[\left(Ca \to Aa\right) \wedge \left(Ca \wedge Ga\right)\right] \to (Ga \to Aa)\right\rangle$ è sempre vero —, ma è invalido per un modello a due individui. Infatti:

$$\left\langle \left\{ \left[\left(Ca \rightarrow Aa \right) \wedge \left(Cb \rightarrow Ab \right) \right] \wedge \left[\left(Ca \wedge Ga \right) \vee \left(Cb \wedge Gb \right) \right] \right\} \rightarrow \left[(Ga \rightarrow Aa) \wedge (Gb \rightarrow Ab) \right] \right\rangle$$

è falso per (*Ca*, *Aa*, *Ga*, *Gb*) / 1 e (*Cb*, *Ab*) / 0

3.3.2. Regole sillogistiche

- Possibilità di esprimere entro il calcolo dei predicati tutte le fondamentali regole del calcolo sillogistico.
- Innanzitutto la regola fondamentale di **simbolizzazione** delle proposizioni a quantificazione **universale** e **particolare** (**esistenziale**), con le relative **negative:**

1. «Tutti gli uomini sono animali»: $\left(\forall x \left(Ux \rightarrow Ax \right) \right)$; «Nessun uomo è un angelo»: $\left(\forall x \left(Ux \rightarrow \neg Gx \right) \right)$.
2. «Qualche uomo corre»: $\left(\exists x \left(Ux \wedge Cx \right) \right)$; «Qualche uomo non corre»: $\left(\exists x \left(Ux \wedge \neg Cx \right) \right)$

- Simbolizzazione della forma fondamentale del **sillogismo *in Barbara*:**
<$\left(\left(\forall x\, Ax \to Mx\right) \wedge \left(\forall x Ux \to Ax\right)\right) \to \left(\forall x Ux \to Mx\right)$> («Se tutti gli animali sono mortali e tutti gli uomini sono animali, allora tutti gli uomini sono mortali»)
- Simbolizzazione della forma *in Barbara* a **quantificazione particolare:**
<$\left(\left(\forall x\, Ix \to Ex\right) \wedge \left(\exists x\, Ix \wedge Rx\right)\right) \to \left(\exists x\, Ex \wedge Rx\right)$**>** («Se tutti gli Italiani sono Europei e alcuni Italiani sono Ricchi, allora alcuni Europei sono ricchi»).
- Simbolizzazione delle **proposizioni tipiche del linguaggio sillogistico**:
universali affermative (tipo A:«Tutti gli Italiani corrono» $\left(\forall x\left(Ix \to Cx\right)\right)$),
le **universali negative** (tipo E: $\left(\forall x\left(Ix \to \neg Cx\right)\right)$),
le **particolari affermative** (tipo I: $\left(\exists x\left(Ix \wedge Cx\right)\right)$)
e le **particolari negative** (tipo O: $\left(\exists x\left(Ix \wedge \neg Cx\right)\right)$). Ora è risaputo che i rapporti sussistenti tra queste proposizioni sono quelli illustrati nel seguente schema:

(A) $\left(\forall x\left(Ix \rightarrow Cx\right)\right)$	contrarie	(E) $\left(\forall x\left(Ix \rightarrow \neg Cx\right)\right)$
subalterne	contraddittorie	subalterne
(I) $\left(\exists x\left(Ix \wedge Cx\right)\right)$	subcontrarie	(O) $\left(\exists x\left(Ix \wedge \neg Cx\right)\right)$

- Ebbene, le formulazioni alternative delle proposizioni consentono, ad esempio, di **evidenziare in modo immediato** il rapporto di **opposizione per contraddizione** di A con O e di I con E. Infatti, sostituendo le formule delle caselle superiori con le equivalenti, si ha:

(A) $\left(\neg\exists x\left(Ix \wedge \neg Cx\right)\right)$	contrarie	(E) $\left(\neg\exists x\left(Ix \wedge Cx\right)\right)$
subalterne	contraddittorie	subalterne
(I) $\left(\exists x\left(Ix \wedge Cx\right)\right)$	subcontrarie	(O) $\left(\exists x\left(Ix \wedge \neg Cx\right)\right)$

- E analogamente, sostituendo, invece, le formule delle caselle inferiori:

(A) $\left(\forall x\left(Ix \rightarrow Cx\right)\right)$	contrarie	(E) $\left(\forall x\left(Ix \rightarrow \neg Cx\right)\right)$
subalterne	contraddittorie	subalterne
(I) $\left(\neg\forall x\left(Ix \rightarrow \neg Cx\right)\right)$	subcontrarie	(O) $\left(\neg\forall x\left(Ix \rightarrow Cx\right)\right)$

- Limite del calcolo sillogistico è **duplice:** 1) Tratta solo predicati **monoargomentali** (predicati che esprimono proprietà e non anche relazioni); 2) Non tratta proprosizioni con **molteplici quantificatori nidificati**, per la necessità di quantificare **tutte le diverse variabili** di una formula predicativa.

- Le **regole d'uso** per i quantificatori, nel caso di predicati a più di un argomento sono le seguenti:

  1. Quando una funzione contiene diverse variabili, per una quantificazione completa, occorre **assegnare un quantificatore a ciascuna di esse.**

P.es., nel caso di due variabili <*Px,y*> dove *P*≡«essere a contatto con…» → 4 possibilità: <(∀*x,y*)(*Px,y*)>; <(∀*x*)(∃*y*)(*Px,y*)>; <(∃*x*)(∀*y*)(*Px,y*)>; <(∃*x*,∃*y*)(*Px,y*)>.

2. Quando diverse variabili sono quantificate dal **medesimo** quantificatore **è lecito scambiarli di posizione** senza che cambi il senso della proposizione, ovvero porre le variabili come argomento di un **unico quantificatore.**

$$(\forall x)(\forall y)(Px,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(Px,y) \leftrightarrow (\forall x,y)(Px,y)$$

3. Viceversa, quando diverse variabili sono quantificate da **diversi** quantificatori, **non è lecito scambiarli di posizione**, senza cambiare il senso della proposizione. P.es., se <*Rx*> sta per «essere a contatto con»:

$$(\forall x)(\exists y)(Rx,y)$$

Vuol dire «ogni corpo è a contatto con qualche corpo» («Per ogni corpo, esiste almeno un corpo con cui è a contatto»).
Invece:

$$(\exists y)(\forall x)(Rx,y)$$

Vuol dire invece che «qualche corpo è a contatto con tutti gli altri» («Esiste almeno un corpo tale che è in contatto con tutti»).

3.3.3. Teoria dei gradi semantici (dei tipi)

- Negli esempi dati finora ci siamo sempre mossi entro il **calcolo dei predicati del primo ordine,** dove gli argomenti dei predicati e quindi dei quantificatori sono sempre **variabili terminali,** termini che denotano individui.
- Nel calcolo dei predicati del **secondo ordine**, gli argomenti di predicati e quantificatori possono invece anche essere **variabili predicative**, ovvero simboli che denotano predicati, in quanto possono essere argomento di un predicato di ordine logico più alto.
- P.es., tesi tipica della logica dei predicati è il cosiddetto **principio degli indiscernibili** formulato da Leibniz secondo il quale «due individui sono **identici** se tutti i predicati che convengono ad uno convengono ad uno convengono anche all'altro», ovvero:

$$\left(x = y\right) := \left(\forall P\right)\left(\forall x, y\right)\left(Px \leftrightarrow Py\right)$$

4. Logica delle classi e identità [BO, pp.117ss.]

4.1.Singolarità e identità nel calcolo dei predicati [GA1, pp.59ss.]

- Come già ricordato più volte, il calcolo proposizionale e dei predicati ha tutta la sua **potenza,** per la formalizzazione della scienza moderna, e tutto il suo **limite,** per la formalizzazione della filosofia, nel fatto di esser stato elaborato appositamente per escludere dalla **logica formale come calcolo** ogni riferimento **ontologico**.
- In particolare, per escludere ogni riferimento alla **teoria degli universali logici** come **enti di pensiero,** e del loro **fondamento reale extra-mentale ed extra-linguistico** mediante la teoria dei **generi naturali** o **nature (essenze)** dei corpi intesi come **enti naturali**.
- Infatti, grazie a quella teoria, nella metafisica medievale, almeno quella di ispirazione aristotelica, si poteva distinguere fra:

1. **Universale generico o «universale-uno-di-molti»,** grammaticalmente espresso in **LN** dalla copula "è" più a destra di essa:

   a. O da un **nome comune** (= **predicazione nominale)** preceduto dall'articolo indeterminativo (Socrate è **un** uomo)[1] che ha come fondamento reale (denota) un particolare **genere o specie** di individui, ovvero, aristotelicamente parlando, una **sostanza seconda** (p.es., l'essenza comune al genere dei "mammiferi", o alla specie dei "gatti", dei "cani", etc.);

   b. O da un **aggettivo** (=**predicazione attributiva**) che ha come fondamento reale (denota) una particolare **proprietà** di un individuo e/o genere di individui, ovvero, aristotelicamente parlando, di un **accidente** di una particolare sostanza, prima (individuo) o seconda (genere). P.es., "l'essere bipede" comune a tutti gli uomini, ovvero al genere umano; o "l'essere filosofo" proprio di Socrate, etc.**.**

2. **Universale individuale o «universale-uno-di-uno»,** grammaticalmente espresso da un nome "proprio" (p.es., "Platone", o "Cristoforo Colombo") e/o da un "termine descrittivo", ovvero un'espressione composta da più parole, precduta dall'articolo determinativo (p.es., "il maestro di Aristotele" o "lo scopritore

dell’America”), che ha come fondamento reale non la “natura” o genere/specie cui líndividuo appartiene, ma **l’essenza individuale** di un **singolo individuo**, ovvero aristotelicamente parlando, di una **sostanza prima**.

3. Conseguentemente, nella logica formale medievale si distingueva fra **quantificazione universale e particolare** per gli universali generici (uno-di-molti), e **quantificazione singolare** (uno-di-uno) per gli universali individuali.

- È chiaro che, in ogni caso, metafisica medievale a parte, “nomi propri” e “termini descrittivi”, come pure la “quantificazione singolare”, hanno un ruolo fondamentale in ogni **LN**, per il problema della **denotazione** di un termine (nome proprio) mediante la relativa **connotazione** (descrizione definita).
- Essi, infatti, come accenneremo, creano un’**infinità di problemi** in semantica formale, irrisolvibili finché limitiamo l’analisi logica delle espressioni referenziali, sia nei linguaggi ordinari che formalizzati, alla sola indagine formale, **semantica e sintattica.**Tali problemi sono infatti legati ultimamente ai teoremi di Gödel e come tali irresolvibili finché non li trattiamo anche in **pragmatica** (=teoria causale della referenza)

- → tentativo fallito di Frege di risolvere il problema della **referenza dei termini** in semantica formale mediante la sua **teoria descrittiva** della referenza.
- → Formalizzazione della **quantificazione singolare** ($\exists! x$: "esiste un unico *x* tale che…") nel calcolo classico dei predicati, senza far riferimento ai generi ontologici, ma solo all'entità astratta delle classi, attraverso la seguente esplicitazione di questa quantificazione.
- Supponiamo [Cfr. GA, p.62ss.] di voler rendere nel **L** del calcolo dei predicati l'espressione di **LN**:

«Esiste un unico filosofo»

- A tale scopo è sufficiente dichiarare:

«Esiste almeno un *x* tale che è filosofo e per ogni *y* che è filosofo *y* è uguale a *x*»

Ovvero, formalizzando:

$$\exists x\left(Fx \wedge \forall y\left(Fy \rightarrow y = x\right)\right)$$

- Se prendiamo il simbolo della quantificazione singolare, $\exists! x$, come abbreviazione della funzione proposizionale precedente, generalizzata a qualsiasi simbolo di predicato, allora la precedente formula di **LN** può essere così formalizzata:

$$\exists! x\, Fx$$

- Come vedremo subito, una tale espressione può essere presa come denotante **una classe ad un solo membro** e tutti i nomi propri e/o i termini descrittivi singolari possono essere presi come denotanti classi di questo tipo.
- → Le espressioni di **LN** che predicano proprietà di nomi propri, p.es.:

  «Socrate è filosofo»

  possono essere perciò espresse in espressioni del tipo: «Esiste un unico individuo caratterizzato dalla proprietà di essere Socrate e tale individuo è filosofo», che formalizzata diventa:

$$\exists! x\left(Sx \wedge Fx\right)$$

- A questo punto, possiamo rendere formalmente anche le **descrizioni definite** in quanto connotano termini singolari come nell'espressione di **LN**:

«Platone è il maestro di Aristotele»

Che formalizzata diventa:

$$\exists! x\Big(Px \wedge \exists! y\big(Ay \wedge M(x,y)\big)\Big)$$

- Come si vede è possibile esprimere nella logica del linguaggio dei predicati termini di qualsivoglia complessità di **LN** usando semplicemente **variabili, quantificatori e il segno d'identità,** naturalmente a patto di **svuotare di significato ontologico** che queste espressioni hanno in **LN**, nella metafisica medievale che usava **LN** e che invece possono tornare ad avere nel linguaggio di un'ontologia formale.
- Un'ontologia che, formalizzando, la teoria medievale degli universali, eviti i **vicoli ciechi** in cui questa teoria cadde alla fine del Medio Evo**.**

4.2.Predicazione e appartenenza di classe [BO, pp.117-9]

4.2.1. Classi ed estensione dei predicati

- Il calcolo dei predicati in cui essi svolgono il ruolo formale di **relazioni fra termini** trovano la loro più naturale esplicazione nella nozione di **classe.**

- Come nella gnoseologia del senso comune ad ogni predicato del linguaggio corrisponde un concetto, logicamente parlando una **intensione** che determina per ciascuno ed una comunità linguistica il “ciò che si intende” con un predicato, nel contesto del calcolo classico dei predicati ad ogni predicato corrisponde la sua **estensione,** formalmente – nel calcolo del primo ordine – la collezione degli argomenti che sono **nomi** denotanti oggetti individuali, che rendono **vero** il predicato. Formalmente, si tratta della collezione degli argomenti del predicato per cui la **funzione di verità** associata al predicato acquista valore 1 e non 0.
- L’**estensione** di un predicato così definita è ciò che denotiamo col nome di **classe.** Nella teoria delle classi di Frege-Russell, ad ogni predicato corrisponde, o, se vogliamo, ogni predicato determina una classe secondo il seguente, cosiddetto, **assioma di comprensione**:

$$\exists \mathbf{A} \forall x \; x \in \mathbf{A} \leftrightarrow Ax \qquad (1)$$

- Dove **A** (in maiuscolo, grassetto) è un segno di (termine che denota una) classe e *A* è il segno del predicato corrispondente alla classe **A,** mentre $\in$ è un predicato terminale bi-argomentale che denota la **relazione di appartenenza di classe,** nel senso estensionale di “essere elemento di”**.** È chiaro che sebbene *x* e **A** siano due variabili terminali essi appartengono a **due gradi semantici** distinti, con **A** appartenente ad un grado superiore.

- Naturalmente il predicato bi-argomentale di appartenenza può connettere non solo un nome di individuo e un nome di classe, ma anche due **nomi che denotano classi**, appartenenti a due gradi semantici diversi, nel qual caso la formula significa che una classe **è elemento** dell’altra, ovvero che quella è **sottoclasse** di questa.
- Il fatto che una classe possa essere membro di un’altra, significa che essa è una molteplicità ridotta a **unità.** Quindi, la classe è un **oggetto logico-astratto** e non va confusa con la collezione di oggetti reali che essa denota. P.es., la classe astratta delle lucertole, relativa al predicato “essere lucertola” non va confusa col **genere naturale reale** corrispondente, ovvero **la specie delle lucertole**, che è composta da milioni e milioni di esemplari e che come tale non può essere membro unitario di alcunché. Ovviamente si può predicare l’appartenenza di un genere a un altro, p.es., della specie delle lucertole al genere dei rettili. Ma questa appartenenza **non vuol dire assolutamente “essere elemento di (*membership*)”**…
- → Le **regole logiche** mediante le quali si decide dell’appartenenza ad una classe nel senso “dell’essere elemento di…” (p.es., di un feto alla classe degli uomini), non so-

no le **regole ontologiche** mediante le quali si decide dell’appartenenza ad un genere di un determinato ente (p.es., di un feto al genere umano).

- **La regola logica fondamentale** per decidere dell’appartenenza di un certo elemento ad una data classe è che esso **soddisfi i(l) predicati(o) che determina l’appartenenza a quella classe**. P.es., in biologia per appartenere alla classe degli umani occorre soddisfare un certo numero di predicati e le relative proprietà denotate da quei predicati, come “avere il genoma tipico della specie umana”, “avere il sistema immunologico tipico della specie umana”, “avere la corteccia cerebrale tipica delle specie umana”.
- **La regola ontologica fondamentale** per decidere dell’appartenenza di un certo individuo ad un medesimo genere biologico è quella di **condividere** con gli altri appartenenti al medesimo genere, **un medesimo concorso causale** che determina in maniera necessitante l’esistenza di ciascuno come appartenente a quel genere → le proprietà che determinano l’appartenenza alla classe esistono virtualmente (in potenza attiva) nel concorso causale e vengono attualizzate progressivamente.

- E’ chiaro che dal **punto di vista ontologico** con $\in$, anche nelle intenzioni di Peano che inventò il simbolo come abbreviazione del termine greco esti terza persona del presente del verbo essere, si intende esprimere formalmente la copula che connette soggetto-predicato in ogni enunciato predicativo.
- Così, p.es., all’espressione di **LN** “il cielo *è* azzurro”, corrisponde simbolicamente, e biunivocamente, una formula di appartenenza come $c\in\mathbf{A}$ che fornisce la semantica estensionale della formula del calcolo dei predicati *Ac*, dove invece manca questa corrispondenza biunivoca con **LN.**
- Naturalmente, nulla di male a interpretare il semantema “essere” come relazione formale di appartenenza nel senso di *membership*: questo è certamente uno dei tanti sensi che esso ha in **LN,** diventato preponderante nella scienza moderna dopo la nascita del concetto matematico di “funzione”.
- Il problema è l’atteggiamento ideologico moderno di ridurre lo “è” di **LN** alla sola funzione linguistico-formale di copula. Far questo significa seguire un’ontologia di tipo kantiano con la quale, ovviamente, molti contenuti fondamentali del semantema “essere” di **LN** vengono eliminati.

- P.es., innanzitutto si elimina la possibilità di formalizzare una metafisica naturalista — di qui l'impossibilità, fra le altre, di una interpretazione realista della nozione di "causa", da cui l'impossibilità di ogni prova dell'esistenza di un Principio Assoluto da cui l'esistenza del mondo causalmente dipenda, etc. Ma questo riduzionismo metafisico elimina anche tutti i contenuti di un'ontologia naturalista da associare alle scienze naturali, ovvero si forza un'interpretazione ontologica puramente fenomenista delle scienze, alla E. Mach, per intenderci, un'interpretazione su cui la gran parte degli scienziati stessi non sarebbe d'accordo.
- E' chiaro che tutte le espressioni dell'ordinario calcolo dei predicati hanno un loro corrispettivo nel **calcolo delle classi,** uso dei quantificatori incluso. Così le proposizioni a **quantificazione universale** del calcolo dei predicati si possono esprimere nei in proposizioni del **calcolo quantificato delle classi.**

P.es.: la proposizione di **C:** $\forall x\left(Ux \rightarrow Mx\right)$ diviene nel **calcolo delle classi:**

$$\forall x\left(\left(x \in \mathbf{U}\right) \rightarrow \left(x \in \mathbf{M}\right)\right)$$

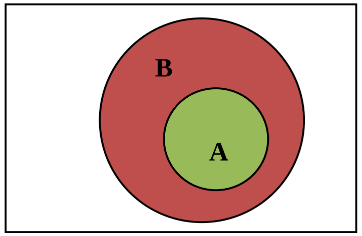
Il che significa che la classe degli uomini U è sottoclasse della (inclusa nella) classe dei mortali **M,** ovvero: $<\mathbf{U} \subseteq \mathbf{M}>$

4.2.2. Principali relazioni fra classi [BO, 120ss.]

- **Le principali relazioni** fra le classi hanno sempre un loro corrispettivo nella logica dei predicati e delle proposizioni, tanto da poter essere definite nei termini di queste. Inoltre, possono essere agevolmente rappresentate graficamente mediante i cosiddetti **diagrammi di Venn:**

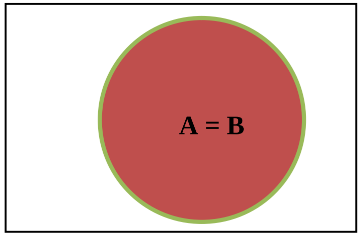
1. **Inclusione** ($\subseteq$): $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} =: \forall x\left(\left(x \in \mathbf{A}\right) \rightarrow \left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

   Se tutti gli elementi della prima classe sono inclusi nella seconda, la prima è **inclusa** nella seconda



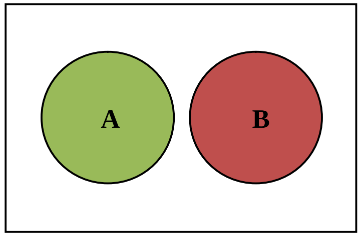
2. **Uguaglianza (=):** $\mathbf{A}=\mathbf{B} =: \forall x\left(\left(x \in \mathbf{A}\right) \leftrightarrow \left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

   Se l'inclusione delle classi è reciproca, le due classi sono dette **uguali.**



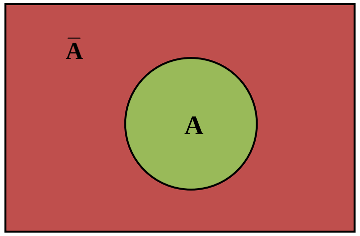
3. **Esclusione ($\not\subset$):** $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B} =: \forall x\left(\left(x \in \mathbf{A}\right) \rightarrow \neg\left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

   Se nessun elemento della prima classe è incluso nella seconda, la prima **esclude** la seconda.



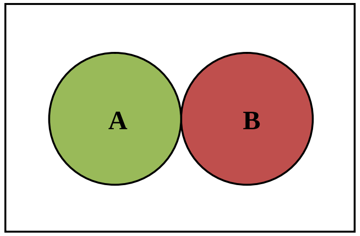
4. **Complemento** ($\bar{\mathbf{A}}$): $\left(x \in \bar{\mathbf{A}}\right) =: \quad \neg\left(x \in \mathbf{A}\right)$

La classe $\bar{\mathbf{A}}$ è detta **complemento** della classe **A,** se tutti gli elementi che appartengono ad $\bar{\mathbf{A}}$ non appartengono ad **A** e viceversa.



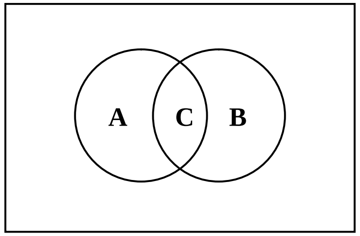
5. **Somma (∪):** $\left(x \in \left(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}\right) =: \left(x \in \mathbf{A}\right) \vee \left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

La **somma** o **unione** di due classi è la classe che contiene gli elementi di ambedue.



6. **Prodotto (∩):** $\left(x \in \left(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}\right) =: \left(x \in \mathbf{A}\right) \wedge \left(x \in \mathbf{B}\right)\right)$

Il **prodotto** o **intersezione C** di due classi è la classe degli elementi comuni ad ambedue.



- Esiste uno stretto rapporto fra **logica delle classi** e **delle proposizioni,** tanto che molti degli assiomi del **calcolo delle proposizioni** valgono anche per il **calcolo delle classi.**

- I rapporti fra **connettivi proposizionali** e **connettivi di classe** sintetizzano bene questo stretto rapporto fra i due calcoli:

  $\leftrightarrow/\equiv$ **equivalenza/uguaglianza**

  $\neg/$ **negazione/complementazione**

  $\rightarrow/\subseteq$ **implicazione/inclusione**

  $\vee/\cup$ **disgiunzione (somma)/unione**

  $\wedge/\cap$ **congiunzione (prodotto)/intersezione**

- La classe **universale U** è la classe che contiene come elementi tutte le classi ed ha proprietà simili alla **verità** nella logica delle proposizioni.

1. **Ogni classe A** è inclusa nella classe universale **U** / **Ogni proposizione *p***, vera o falsa che sia, implica una proposizione **vera** 1
   $\forall \mathbf{A}\left(\mathbf{A} \subseteq \mathbf{U}\right) \quad / \quad \forall p\left(p \supset 1\right)$
2. L'**unione** di una classe qualunque **A** e della classe universale **U** è uguale alla classe universale / La **somma (disgiunzione)** di una qualunque proposizione *p*, vera o

falsa, con una proposizione vera 1 equivale ad una proposizione vera.
$\mathbf{A} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ / $(p \vee 1) \leftrightarrow 1$

3. L'**intersezione** della classe universale **U** con una qualsiasi classe **A** è uguale a questa classe / La **congiunzione (prodotto)** di una qualsiasi proposizione *p* con la proposizione vera 1 equivale alla proposizione *p* stessa (sarà una proposizione vera, se *p* è vera, sarà una proposizione falsa se *p* è falsa)
$\mathbf{A} \cap \mathbf{U} = \mathbf{A}$ / $(p \wedge 1) \leftrightarrow p$

- La **classe vuota (∅)** è la classe cui non appartiene alcun elemento. Di per sé una classe, per esistere logicamente, deve contenere almeno **un elemento**. P.es., la classe dei satelliti di Venere non esiste, perché il pianeta Venere non ha alcun satellite. Tuttavia la classe vuota è un costrutto logicamente importante per vari motivi.
  - Dal punto di vista della fondazione dei numeri come "classi di classi" il numero "0" è definito come "classe di tutte le classi vuote", come il numero "1" è definito come "classe di tutte le classi con un elemento", il "2" come "classe di tutte le classi a due elementi", etc.

- Inoltre la “classe vuota” è la classe contenuta in ogni classe **ben definita** perché è la sotto-classe che contiene tutti gli elementi che **non appartengono** a quella classe, ovvero gli elementi che appartengono alla classe complementare di quella data. Il che è come dire che la classe è ben costruita per discriminare fra gli elementi che vi appartengono e quelli che non vi appartengono.

- Ma, soprattutto, la classe vuota ha delle proprietà del tutto simili a quelle della **falsità** in logica delle proposizioni. Analogamente, ma in maniera contrapposta, alle corrispondenze che abbiamo trovato fra la classe **U** in logica delle classi e la **V (1)** in logica delle proposizioni, valgono le seguenti corrispondenze fra la classe $\varnothing$ e la **F (0)** in logica delle proposizioni:

1. **Ogni classe A include** la classe vuota $\varnothing$ / **La proposizione falsa 0 implica** qualsiasi ***p***, vera o falsa che sia:
   $\forall \mathbf{A} \left(\varnothing \subseteq \mathbf{A} \right) \quad / \quad \forall p \left(0 \supset p \right)$

2. L’**unione** di una classe qualunque **A** e della classe vuota $\varnothing$ è uguale alla classe **A** / La **somma (disgiunzione)** di una qualunque proposizione *p*, vera o falsa, con una

proposizione vera 0 equivale alla proposizione *p* (sarà una proposizione vera, se *p* è vera, sarà una proposizione falsa se *p* è falsa).

$\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A}$ / $(p \vee 0) \leftrightarrow p$

3. L'**intersezione** della classe vuota $\varnothing$ con una qualsiasi classe **A** è uguale alla classe vuota $\varnothing$ / La **congiunzione (prodotto)** di una qualsiasi proposizione *p* con la proposizione falsa 0 equivale alla proposizione falsa 0.

   $\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing$ / $(p \wedge 0) \leftrightarrow 0$

4.2.3. Classi e insiemi

- Infine è importante sottolineare quale sia la differenza fondamentale fra **classi** e **insiemi.**
- Come sappiamo, almeno nella **teoria elementare** delle classi che stiamo qui illustrando, le classi sono **costituite** mediante un assioma dal significato molto intuitivo, quale il già citato **assioma di comprensione** (cfr. §4.2.1, assioma (1)).

- Viceversa, gli insiemi sono **costruiti** (se ne **dimostra** cioè l'esistenza) attraverso il **potente teorema dell'insieme potenza** di Cantor. Secondo questo teorema "ogni insieme **A** è sottoinsieme del suo insieme-potenza **PA"**, dove **PA** è l'insieme di tutti i sottoinsiemi costruibili combinando gli elementi di **A**. Se dunque la cardinalità (= il numero degli elementi) di **A** è *n*, la cardinalità di **PA** sarà 2^n.
- P.es., dato un insieme **A** di quattro elementi {a, b, c, d}, esso può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme-potenza di **A**, **PA=B**, composto di sedici elementi. **B** sarà composto cioè da sottoinsiemi costituiti da tutte le combinazioni possibili degli elementi di **A**: nessuno, a uno a uno, a due a due, a tre a tre, e, infine, a quattro a quattro, cioè **A**: {{∅}, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c}, {a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, {a,b,c,d}}, in totale 16 elementi (sottoinsiemi), fra i quali si trova il nostro insieme **A** di partenza, di cui così abbiamo dimostrato l'esistenza. Ovviamente, a sua volta, il nostro insieme potenza, **B,** composto di 16 elementi sarà sottoinsieme del suo insieme-potenza **PB=C**, nel nostro caso con una cardinalità di 2^{16} elementi, e così via all'infinito…

- Come si vede, esiste uno stretto rapporto fra **insieme** e oggetti **matematici, costitutivamente** e non solo **intuitivamente**.
  - **Intutitivamente** tale relazione esiste perché ogni oggetto geometrico può considerarsi come un insieme connesso di punti e/o ogni numero un insieme unitario di unità. Questa intuizione fu all'origine dell'idea di usare la teoria degli insiemi come **metalinguaggio** delle teorie matematiche, una volta che, dopo la dimostrazione del carattere ipotetico-deduttivo e non apodittico delle geometrie, divenne indispensabile **dimostrare la coerenza** delle teorie.
  - **Costitutivamente** tale relazione esiste perché fra ogni coppia di grandezze geometriche e/o numeriche esiste una relazione di **maggiorazione (≥)-minorazione (≤) fra grandezze**, esattamente come fra gli insiemi, in quanto costruiti attraverso il teorema di Cantor, esiste un'**intrinseca relazione di ordinamento quantitativo** legata ad una ancora più fondamentale relazione di **maggiorazione($\succeq$)-minorazione ($\preceq$) fra insiemi** (**PA** avrà certamente una cardinalità maggiore di **A** e viceversa) che presiede alla relazione di **inclusio-**

ne fra insiemi. Delle relazioni di fondazione di un ordinamento quantitativo che di per sé non troviamo nell'analoga fondazione della relazione di **inclusione** mediante la nozione di **classe**.
P.es., la classe dei "laureati" è sicuramente inclusa in quella degli "universitari" perché l'essere (stato) universitario è condizione necessaria per laurearsi. Ma da questa inclusione non ho alcuna informazione sul valore relativo delle grandezze coinvolte, che potrebbero essere addirittura equivalenti. Tali incertezze mancano in una teoria costruttiva degli insiemi (→ teoria delle classi ha un ambito più vasto di applicazione della teoria degli insiemi).

- Così, se, con il teorema di Cantor, avessimo potuto dimostrare anche l'esistenza di insiemi-limite, quale il **continuo matematico** e più ancora dell'insieme **U**, l'insieme universale — e non soltanto supporlo come esistente, come avviene con la classe **U —**, si capisce la potenza di un tale metodo, se ricordiamo la stretta relazione fra **U** e la **Verità** in logica. Per questo talvolta l'insieme (classe) universale è anche denotato direttamente con **V.**

- **Viceversa**, sappiamo come ogni tentativo di dimostrare l'esistenza dell'insieme universale **U** porta necessariamente ad un'**antinomia**, tanto con i numeri cardinali (l'insieme **U** infatti in quanto "universale" dovrà contenere qualsiasi altro insieme, ma in quanto "insieme", per esistere, dovrà essere necessariamente contenuto in uno di cardinalità maggiore), quanto con gli ordinali (non può esistere un insieme ordinale **massimale** infatti ogni ordinale contiene sotto di sé tutti gli ordinali minori, ma mai se stesso).
- Di qui la necessità, per garantire la costruibilità, mediante il teorema di Cantor, almeno degli insiemi di cardinalità minore di **U,** di integrare la teoria degli insiemi di Cantor con **l'assioma dell'insieme-potenza** di Von Neumann, che suppone cioè che gli insiemi potenza "troppo grandi", quelli che approssimano la cardinalità di **U**, costituiscano una **classe** e non un insieme. Si passa cioè da una teoria **costruttiva** ad una teoria **assiomatica** degli insiemi.
- Limitandoci, e di molto, ad illustrare l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi solo rispetto alla nozione di **esistenza,** le tre principali teorie assiomatiche degli insiemi sono:

1. La teoria di Zermelo-Fraenkel (ZF) che rimuove le antinomicità della teoria semplicemente costruttiva, supponendo l'esistenza degli insiemi **minimali**, ovvero gli "individui", o **Ur-Elemente**. L'antinomicità della teoria costruttiva può essere vista non solo rispetto agli insiemi massimali, ma anche rispetto a quelli minimali. Gli "individui" infatti sono "insiemi" o no? E se sì, come la teoria costruttiva sembra implicare, come giustificarli, visto che per esistere essi dovrebbero essere **inclusi** come sotto-insiemi del loro insieme- potenza, ma esso a sua volta, per esistere, deve supporre che tutti i suoi sotto-insiemi, individui compresi, già esistano…?

2. La teoria di Von Neumann-Goedel-Bernay (NGB) che rimuove le antinomicità della teoria semplicemente costruttiva, supponendo l'esistenza degli insiemi **massimali** mediante il già citato "assioma dell'insieme-potenza".

3. La teoria di Cohen che sceglie un'altra strada, quella di **indebolire** la nozione di **implicazione (inclusione)** in logica, sostituendola con quella di **forzatura** (*forcing*), nel senso che le premesse "forzano" non "implicano" in senso forte certe conclusioni… [per un approfondimento di questi temi, rimando al nostro libro:

G. BASTI & A. L. PERRONE, *Le radici forti del pensiero debole*, Padova-Roma, 1996].

4.2.4. Teoria estensionale dell’identità

- Le strette **relazioni** fra logica delle classi, dei predicati e delle proposizioni consentono di costruire una teoria **estensionale** dell’identità, basata cioè su una teoria della significazione dei predicati che riduce l’analisi del significato dei predicati stessi alla sola analisi dell’**estensione** (ciò a cui i predicati si riferiscono) dei predicati stessi, senza considerare la loro **intensione** (ciò che si intende con quei predicati).

- Estensionalmente, due cose sono **identiche**, quando i loro nomi **denotano** (significano) **la stessa cosa.**
  P.es.: diciamo che **Marco Tullio** è identico a **Cicerone**

- Simbolo **identità**: “**=**”
  Simbolo **diversità**: “**≠**”

- Intensionalmente, due cose sono **identiche,** quando **tutti i predicati** che convengono ad una convengono anche all'altra, e viceversa.
  $(x = y) =: \forall P(Px \leftrightarrow Py)$
  $(x \neq y) =: \neg(x = y)$

- La relazione di **identità,** soddisfa alle tre relazioni, **riflessiva, simmetrica e transitiva:**
  4. **Riflessiva:** $\forall x(x = x)$
  5. **Simmetrica:** $(\forall x, y)((x = y) \rightarrow (y = x))$
  6. **Transitiva:** $(\forall x, y, z)(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$

4.2.5. Teoria estensionale dell'identità e classi di equivalenza

- È chiaro che la **teoria delle classi** consente una (come vedremo subito: parziale) riduzione della stessa nozione intensionale dell'identità appena vista, in termini di **equivalenza di predicati,** ad una estensionale in termini di **classi di equivalenza**, classi cioè determinate da predicati fra loro equivalenti e che quindi denotano **un'unica classe**, dato che **l'uguaglianza fra classi** si definisce nei termini della loro equivalenza, dell'avere cioè la medesima **estensione**. Ovvero:

$$(\exists P,Q)(\forall x,y)\big((Px \leftrightarrow Qy) \rightarrow (\mathbf{P} \leftrightarrow \mathbf{Q})\big) \leftrightarrow (\exists P,Q)(\forall x,y)\big((\mathbf{P} = \mathbf{Q}) \wedge (x = y)\big)$$

- Il carattere parziale di questa riduzione, diviene subito evidente quando, p.es., sostituiamo ai predicati *P* e *Q* i predicati di **LN** "essere animali razionali" ed "essere bipedi implumi". È chiaro che ambedue questi predicati sono equivalenti e perciò determinano **un'unica classe di equivalenza**, quella appunto degli "uomini". Il che soddisfa pienamente la suddetta formula, in senso appunto estensionale.
- È altrettanto chiaro, però, che **il contenuto intensionale della formula** in **LN** non è pienamente soddisfatto, dato che definire descrittivamente la classe degli uomini nei termini di "animali razionali" o di "bipedi implumi" non è affatto equivalente, né a livello di ciò che si intende con queste due predicazioni (livello concettuale), né a livello delle rispettive proprietà naturali cui ci riferiamo con le due distinte predicazioni (livello ontico).

- È evidente perciò che una logica di tipo intensionale rimanda necessariamente a delle **soggiacenti ontologie**, concettualiste, naturaliste e/o all'intersezione delle due, il cosiddetto **concettualismo naturalista**…

5. Cenni di logica delle relazioni

5.1.Relazioni e predicati

- La **logica delle relazioni** è la parte fondamentale della logica formale, perché la logica formale moderna, intesa come calcolo formale, è essenzialmente una **scienza delle relazioni.**
- Una relazione può essere definita **estensionalmente** in logica simbolica, come **il significato di un predicato n-argomentale**, sia esso un predicato proposizionale (non, et, vel, aut…) , sia esso un predicato terminale. Viceversa, nella logica formale un predicato può essere definito come ciò che denota una data relazione fra i suoi argomenti, siano essi termini o proposizioni.
  - Nel caso dei predicati proposizionali, il **senso** o la **connotazione** della relazione denotata dal predicato è definita estensionalmente dalle rispettive tavole di verità.
  - Nel caso dei predicati terminali, il **senso** o la **connotazione** della relazione denotata dal predicato è definita estensionalmente nei termini delle relative

classi di appartenenza degli elementi denotati dagli argomenti del predicato, nonché della classe determinata dalla relazione e delle relazioni fra queste classi.

- Lo stesso significato **intensionale** di un predicato terminale mono-argomentale, come ciò che denota una certa **proprietà** (p.es., "l'esser rosso" del sangue), può essere definito come denotazione di una **relazione a un termine,** connotabile come (il cui senso è dato dalla) **relazione di appartenenza alla classe** denotata dal predicato mono-argomentale.
- Come si vede, dal punto di vista ontologico, in tutto questo **non si esce dall'ambito linguistico**, non si fa cioè alcun riferimento né a **stati o atti mentali,** né a **oggetti extra-mentali**.

5.2.Il simbolismo della logica delle relazioni

- I simboli delle **relazioni** possiedono tutte le proprietà delle dei predicati **mono-argomentali** nel senso che **ogni relazione determina una classe,** ma con i più tutte le proprietà derivanti dal fatto che nei predicati e relazioni **pluri-argomentali**, **l'ordine degli argomenti** svolge un ruolo essenziale.

- Generalmente, denotando una generica relazione con *R*, è invalso da Russell in poi, per distinguere un simbolo di predicato da uno di relazione, **porre la relazione fra i suoi argomenti**, ovvero invece di scrivere $R(x,y)$ scrivere xRy.
- L'**antecedente** della relazione *R* denota **ciò che ha la relazione *R*** con qualche altra cosa denotata dal conseguente. Es.: "padre" nel caso in cui *R* denoti la relazione di paternità.
- Il **conseguente** della relazione *R* denota **ciò con cui qualcosa denotato dall'antecedente ha la relazione *R***. Es.: "figli(/e/o/a)" nel caso in cui la relazione *R* denoti la paternità.
- La **classe di tutti gli antecedenti** della relazione *R* viene denotata come il **dominio** della relazione.
- La **classe di tutti i conseguenti** viene denotata come il **codominio** della relazione [si noti che questa denominazione è l'opposto di quella che si usa per le funzioni ($y=f(x)$) dove è il termine passivo il **codminio *y*** ad essere evidenziato come antece-

dente (= “ciò che è funzione di”), ed è il **dominio *x*** ad occupare il posto del conseguente].

- In ogni caso, sia per le **relazioni** che per le **funzioni** l’unione del dominio e del codominio è denotato come il **campo** o **supporto** della relazione (funzione).
- La relazione **inversa** $\breve{R}$ è quella che il conseguente della relazione *R* ha col suo antecedente. Es.: $\breve{R}$ denota la “figliolanza” se *R* denota la “paternità”.
- Altre relazioni significative sono:

1. **Simmetrica.** Quando una relazione è equivalente alla sua inversa:
   sim $R =: (\forall x, y)(xRy \leftrightarrow yRx)$ ovvero $(\forall x, y)(xRy \leftrightarrow x\breve{R}y)$
   P.es., dove *R* denota “amicizia”.
2. **Riflessiva.** Quando sussiste fra qualcosa e se stesso:
   refl $\boldsymbol{R} =: (\forall x)\, xRx$
   P.es., dove *R* denota “identità”

3. **Transitiva.** Quando sussiste fra le coppie dei diversi elementi di una successione, sussiste anche fra gli estremi della serie:
trans R =: $(\forall x, y, z)\big((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz\big)$
P.es., dove R denota “più grande di”.

4. **Identica.** Quando valgono congiuntamente la relazione transitiva, simmetrica e riflessiva:
id R =: **trans** $R \wedge$ **sim** $R \wedge$ **rifl** R.

5. **Prodotto relativo.** Il prodotto (composizione) di due relazioni R e Q è la relazione che esiste fra x e z se abbiamo xRy e yQz.
$(R \circ Q)xz =: (\exists y)\big((xRy) \wedge (yQz)\big)$
P.es., dove R denota “essere fratello”, Q “essere padre” e dunque il prodotto di queste due relazioni (“essere fratello di padre di”) ovvero il prodotto relativo <($R\circ Q$)>, denota la relazione “essere zio paterno”. [Si noti l’uso del quantificatore esistenziale per significare che, se non esistesse almeno un termine intermedio y, comune alle due relazioni, non si darebbe prodotto].

6. **Quadrato relativo**. Il prodotto che ogni relazione ha con se stessa:
   $\boldsymbol{R}^2 =: R \circ R$

   P.es.: dove R denota “essere padre di”, R^2 denota “essere nonno paterno di” e iterando, <$R^3 =: R \circ R^2$> denota “essere bisnonno paterno di” e più in generale:

   $R^n =: R \circ R^{n\text{-}1}$

5.3.Relazioni e funzioni descrittive

- **Infine,** molto importante per la semantica modale e quindi per la logica intensionale sono le cosiddette **funzioni descrittive**, corrispettivo nella logica delle relazioni di quelle **descrizioni definite** che abbiamo già incontrato (cfr. slide 202), quando nella logica dei predicati abbiamo affrontato il problema della **quantificazione singolare**.
- Delle funzioni descrittive si fa larghissimo uso in matematica quando si vuole denotare il **singolo valore di una funzione,** p.es. <sin *x*>, “seno di *x*”, che ha un singolo valore ben definito per ciascuna *x*.

- Generalizzando, se *R* denota la relazione di “maternità”, **<*R’y*>** connota ciò che in **LN** costituisce la sostanzializzazione in un individuo — e quindi la “nominalizzazione singolare” mediante l’articolo determinativo —, della relazione *R*, cioè “la madre di *y*” che, ovviamente, **connota un singolo *x*** (*mater semper certa est*) [o almeno lo era: oggi non è detto che la madre biologica (partoriente) coincida con quella genetica (che ha fornito l’ovulo), quindi la “relazione di maternità” *R* oggi va definita meglio, per poter definire con essa una funzione descrittiva. La “relazione di paternità”, invece, ha sempre avuto di questi problemi…].
  P.es., se *y* denota Sant’Agostino, <*R’y*> , ovvero “la madre di S. Agostino”, connota in maniera definita e quindi denota univocamente Santa Monica.

- → Siccome una funzione descrittiva connota sempre **un individuo singolo esistente**, non ha senso scrivere “il figlio di Noè”, perché Noè ha avuto molti figli, né “il padre di Adamo” perché non è mai esistito.

- Generalizzando si possono definire **funzioni descrittive che connotano classi** e non individui. Le classi, infatti, essendo oggetti astratti, logici, differentemente dai **generi naturali**, supportano quella ***reductio ad unum,*** quell’essere trattati come **oggetti**

singoli (logicamente) esistenti , che un genere naturale, invece, in quanto entità extra-logica (collezione di individui naturali esistenti), “sostanza seconda, esistente non *in sé*, ma *nei molti*” assolutamente non supporta.

- Il simbolo con cui in logica si denota una **funzione descrittiva** è quello che in matematica soprattutto i fisici usano per definire “un vettore di valori”, ovvero un certo insieme di valori, in quanto costituiscono il dominio o, più spesso, il codominio di una certa funzione. Quindi in logica, data la relazione *xRy*,

1. **Dominio di *R***: $\left\langle \vec{\mathbf{R}}\,'\,y \right\rangle$ (o anche <**sgR**’*y*> (dove **sg** sta per il latino *sagitta*, “freccia”)), ovvero la classe o insieme degli {*x*} che hanno con {*y*} la relazione *R*. P. es., se *R* è la relazione di “paternità”, $\left\langle \vec{\mathbf{R}}\,'\,y \right\rangle$connota {*x*} che denota l’insieme dei padri, mentre {*y*} denota l’insieme dei figli.
2. **Codominio di *R***: $\left\langle \overleftarrow{\mathbf{R}}\,'\,x \right\rangle$ (o anche <**gsR’***x*> (dove **gs** è un modo per denotare l’inverso di **sg**), ovvero la classe o insieme degli {*y*} con cui gli {*x*} hanno la relazione *R*.

P. es., se R è la relazione di “paternità”, $\left\langle \overleftarrow{\mathbf{R}}\,'x \right\rangle$ connota $\{y\}$ che denota l’insieme dei figli, mentre $\{x\}$ denota l’insieme dei padri.

Sommario

Note

---

[1] Nei libri di logica in inglese è invalso di definire questi nomi comuni usati in forma predicativa come ***sortal names.*** In effetti, gli appartenenti a un genere, in quanto individui solo genericamente definite, sono distinti solo numericamente, ovvero in quanto oggetto di un conteggio (*sorting*). È il classico della riduzione di un individuo a “numero” che è tipico di ogni predicazione scientifica, per l’appunto *generica*. Degli individui come tali (se vogliamo addirittura come “persone” che denota il massimo dell’individualità) non si fa scienza (*individuum non est scientia*).